Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Уфимский государственный авиационный технический университет»

Кафедра экономики предпринимательства

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

к практическим занятиям по дисциплине «Экономико-математическое моделирование»

Уфа 2022

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Уфимский государственный авиационный технический университет»

Кафедра экономики предпринимательства

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

к практическим занятиям по дисциплине
«Экономико-математическое моделирование»

Учебное электронное издание сетевого доступа

© УГАТУ

Уфа 2022

Авторы-составители: Ю. Т. Мансурова, П. А. Туктарова

Методические рекомендации по дисциплине «Экономико-математическое моделирование» [Электронный ресурс] / Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т ; [авт.-сост. : Ю. Т. Мансурова, П. А. Туктарова]. – Уфа : УГАТУ, 2022. – URL: https://www.ugatu.su/media/uploads/MainSite/Ob%20 universitete/Izdateli/El_izd/2022-72.pdf

Содержат основные аспекты экономико-математического моделирования, примеры, иллюстрирующие типовые задачи, перечень заданий для самостоятельного решения.

Предназначены для студентов, обучающихся по специальности 38.05.01 Экономическая безопасность.

Рецензент канд. экон. наук, доцент А. В. Старцева

При подготовке электронного издания использовались следующие программные средства:

- Adobe Acrobat – текстовый редактор;
- Microsoft Word – текстовый редактор.

Авторы-составители: *Мансурова Юлия Талгатовна;*
Туктарова Полина Андреевна

Верстка *Р. М. Мухамадиева*
Программирование и компьютерный дизайн *О. М. Толкачёва*

Все права защищены. Книга или любая ее часть не может быть скопирована, воспроизведена в электронной или механической форме, в виде фотокопии, записи в память ЭВМ, репродукции или каким-либо иным способом, а также использована в любой информационной системе без получения разрешения от издателя. Копирование, воспроизведение и иное использование книги или ее части без согласия издателя является незаконным и влечет уголовную, административную и гражданскую ответственность.

Подписано к использованию: 27. 04.2022
Объем: 1,19 Мб.

ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет»
450008, Уфа, ул. К. Маркса, 12.
Тел.: +7-908-35-05-007
e-mail: rik@ugatu.su

ВВЕДЕНИЕ

Даны рекомендации по построению математических моделей и решению задач исследования операций в области: линейного программирования, сетевого планирования, динамического программирования и теории игр.

В целях более эффективного усвоения учебного материала каждая тема содержит подробные методические указания с описанием решения конкретных задач, варианты задач для самостоятельного решения.

Методические рекомендации будут полезны при самостоятельной работе студентов над контрольными заданиями по курсу «Экономико-математическое моделирование».

1. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

1.1. Практическая часть

Пример 1.1.

Определение оптимального ассортимента продукции.

Предприятие изготавливает два вида продукции – $П_1$ и $П_2$, которая поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используются два вида сырья – A и B. Максимально возможные запасы сырья в сутки составляют 9 и 13 единиц соответственно. Расход сырья на единицу продукции вида $П_1$ и вида $П_2$ дан в табл. 1.1.

Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию $П_1$ никогда не превышает спроса на продукцию $П_2$ более чем на 1 ед. Кроме того, известно, что спрос на продукцию $П_2$ никогда не превышает 2 ед. в сутки. Оптовые цены единицы продукции равны: 3 д. е. – для $П_1$ и 4 д. е. для $П_2$.

Таблица 1.1

Табличный вид условия

Сырьё	Расход сырья на 1 ед. продукции		Запас сырья, ед.
	$П_1$	$П_2$	
A	2	3	9
B	3	2	13

Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Решение:

Предположим, что предприятие изготовит x_1 единиц продукции $П_1$ и x_2 единиц продукции $П_2$. Поскольку производство продукции $П_1$ и $П_2$ ограничено имеющимися в распоряжении предприятия сырьем каждого вида и спросом на данную продукцию, а также учитывая, что количество изготовляемых изделий не может быть отрицательным, должны выполняться следующие неравенства:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 9,$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 13,$$
$$x_1 - x_2 \leq 1,$$
$$x_2 \leq 2,$$
$$x_1 \geq 0,$$
$$x_2 \geq 0.$$

Доход от реализации x_1 единиц продукции Π_1 и x_2 единиц продукции Π_2 составит $F = 3x_1 + 4x_2$.

Таким образом, мы приходим к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений данной системы линейных неравенств требуется найти такое, при котором функция F принимает максимальное значения.

Пример 1.2.

Задача составления рациона.

При откорме каждое животное ежедневно должно получить не менее 9 ед. питательного вещества S_1, не менее 8 ед. вещества S_2 и не менее 12 ед. вещества S_3. Для составления рациона используют два вида корма. Содержание количества единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и стоимость 1 кг корма приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Содержание количества единиц питательных веществ и стоимость

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ в 1 кг корма	
	корм I	корм II
S_1	3	1
S_2	1	2
S_3	1	6
Стоимость 1 кг корма, тыс. руб	4	6

Необходимо составить дневной рацион нужной питательности, причем затраты на него должны быть минимальными.

Решение:

Для составления математической модели обозначим через x_1 и x_2 соответственно количество килограммов корма I и II в дневном рационе. Принимая во внимание значения, приведенные в таблице, и условие, что дневной рацион удовлетворяет требуемой питательности только в случае, если количество единиц питательных веществ не меньше предусмотренного, получаем систему ограничений:

$$3x_1 + x_2 \geq 9,$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 8,$$
$$x_1 + 6x_2 \geq 12,$$
$$x_1 \geq 0,$$
$$x_2 \geq 0.$$

Цель данной задачи – добиться минимальных затрат на дневной рацион, поэтому общую стоимость рациона можно выразить в виде линейной функции $Z = 4x_1 + 6x_2$.

Пример 1.3.

Определение оптимального плана выпуска продукции.

Выполнить заказ по производству 32 изделий И1 и 4 изделий И2 взялись бригады Б1 и Б2. Производительность бригады Б1 по производству изделий И1 и И2 составляет соответственно 4 и 2 изделия в час, фонд рабочего времени этой бригады 9,5 ч. Производительность бригады Б2 – соответственно 1 и 3 изделия в час, а ее фонд рабочего времени – 4 ч. Затраты, связанные с производством единицы изделия, для бригады Б1 равны соответственно 9 и 20 руб., для бригады Б2 – 15 и 30 руб.

Составьте математическую модель задачи, позволяющую найти оптимальный объем выпуска изделий, обеспечивающий минимальные затраты на выполнение заказа.

Решение:

Искомыми величинами в задаче являются объемы выпуска изделий. Изделия $И_1$ будут выпускаться двумя бригадами $Б_1$ и $Б_2$. Поэтому необходимо различать количество изделий $И_1$, произведенных бригадой $Б_1$, и количество изделий $И_1$, произведенных бригадой $Б_2$. Аналогично, объемы выпуска изделий $И_2$ бригадой $Б_1$ и бригадой $Б_2$ также являются различными величинами. Вследствие этого в данной задаче 4 переменные.

Для удобства восприятия будем использовать двухиндексную форму записи xij – количество изделий $И_j$ (j = 1,2), изготавливаемых бригадой $Б_i$ (i = 1,2), а именно:

x_{11} – количество изделий $И_1$, изготавливаемых бригадой $Б_1$, [шт.];

x_{12} – количество изделий $И_2$, изготавливаемых бригадой $Б_1$, [шт.];

x_{21} – количество изделий $И_2$, изготавливаемых бригадой $Б_2$, [шт.];

x_{22} – количество изделий $И_2$, изготавливаемых бригадой $Б_2$, [шт.].

Целью решения задачи является выполнение плана с минимальными затратами, т. е. критерием эффективности решения служит показатель затрат на выполнение всего заказа. Поэтому целевая функция должна быть представлена формулой расчета этих затрат. Затраты каждой бригады на производство одного изделия $И_1$ и $И_2$ известны из условия. Таким образом, задача имеет вид:

$$L(X) = 9x_{11} + 20x_{12} + 15x_{21} + 30x_{22} \rightarrow \min[\text{руб}],$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 32 \text{ [шт.]}, \\ x_{12} + x_{22} = 4 \text{ [шт.]}, \\ \dfrac{x_{11}}{4} + \dfrac{x_{12}}{2} \leq 9{,}5 \text{ [ч]}, \\ \dfrac{x_{21}}{1} + \dfrac{x_{22}}{3} \leq 4 \text{ [ч]}, \\ x_{ij} \geq 0, (i = 1{,}2; j = 1{,}2) \text{ [шт.]}. \end{cases}$$

Пример 1.4.

Определение оптимального плана раскроя.

Для пошива одного изделия требуется выкроить из ткани 6 деталей. На швейной фабрике были разработаны два варианта раскроя ткани. В табл. 1.3. приведены характеристики вариантов раскроя 10 м^2 ткани и комплектность, т. е. количество деталей определенного вида, которые необходимы для пошива одного изделия. Ежемесячный запас ткани для пошива изделий данного типа составляет 405 м^2. В ближайший месяц планируется сшить 90 изделий. Постройте математическую модель задачи, позволяющую в ближайший месяц выполнить план по пошиву с минимальным количеством отходов.

Таблица 1.3

Варианты раскроя ткани

Вариант раскроя	Количество деталей, шт./отрез						Отходы, $м^2$/отрез
	1	2	3	4	5	6	
1	60	0	90	40	70	90	0,5
2	80	35	20	78	15	0	0,35
Комплектность, шт./изделие	1	2	2	2	2	2	

Решение:

В данной задаче искомые величины явно не указаны, но сказано, что должен быть выполнен ежемесячный план по пошиву 90 изделий. Для пошива 90 изделий в месяц требуется раскроить строго определенное количество деталей. Крой производится из отрезов ткани по 10 $м^2$ двумя различными способами, которые позволяют получить различное число деталей. Поскольку заранее неизвестно, сколько ткани будет раскраиваться первым способом и сколько – вторым, то в качестве искомых величин можно задать количество отрезов ткани по 10 $м^2$, раскроенных каждым из способов:

x_1 – количество отрезов ткани по 10 $м^2$, раскроенных первым способом в течение месяца;

x_2 – количество отрезов ткани по 10 $м^2$, раскроенных вторым способом в течение месяца.

Целью решения задачи является выполнение плана при минимальном количестве отходов. Таким образом, задача имеет вид:

$$L(X) = 0{,}5x_1 + 0{,}35x_2 \rightarrow \min\ [м^2\ отх./мес.],$$

$$\begin{cases} 60x_1 + 80x_2 \geq 90\ [шт./мес.], \\ 35x_2 \geq 180\ [шт./мес.], \\ 90x_1 + 20x_2 \geq 180\ [шт./мес.], \\ 40x_1 + 78x_2 \geq 180\ [шт./мес.], \\ 70x_1 + 15x_2 \geq 180\ [шт./мес.], \\ 90x_1 \geq 180\ [шт./мес.], \\ x_1 + x_2 \leq 40{,}5\ [отрез./мес.], \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\ [отрез./мес.]. \end{cases}$$

1.2. Задания для самостоятельной работы

Задача 1.1.

Предприятие имеет сырье трех видов: 1 вида – 200 кг, 2 вида – 300 кг, 3 вида – 600 кг. Это предприятие выпускает изделия четырех наименований (1, 2, 3, 4). Норма расхода сырья на изготовление единицы каждого изделия дается в табл. 1.4. Там же приведена возможная прибыль от реализации изделий каждого вида. Найти ассортимент изделий, дающий максимальную прибыль от реализации всех изделий.

Таблица 1.4

Табличный вид условия

Сырье	Нормы расхода сырья на единицу изделия, кг			
	1	2	3	4
1	2	2	1	2
2	4	5	3	6
3	1	1	2	1
Прибыль от реализации 1 ед. изделия, руб.	6	4	7	9

Задача 1.2.

Предприятие располагает ресурсами сырья, рабочей силой и оборудованием, необходимыми для производства любого из четырех видов производимых товаров. Затраты ресурсов на изготовление единицы каждого вида товара и прибыль, получаемая предприятием, а также объем ресурсов указаны в табл. 1.5.

Таблица 1.5

Табличный вид условия

Ресурсы	Затраты ресурсов на 1 ед. товара				Объем ресурсов
	1	2	3	4	
Сырье, кг	3	5	2	4	60
Рабочая сила, чел.	22	14	18	30	400
Оборудование, станко-ч	10	14	8	16	130
Прибыль на 1 ед. товара, руб.	30	25	56	48	

Составить план выпуска товаров, дающий максимальную прибыль.

Задача 1.3.

Для изготовления трех видов изделий (A, B и C) фабрика расходует в качестве сырья сталь и цветные металлы, имеющиеся в ограниченном количестве. На изготовлении указанных изделий заняты токарные и фрезерные станки.

В табл. 1.6. приведены объем ресурсов, которыми располагает предприятие, и нормы расхода перечисленных ресурсов на единицу изделия. Кроме того, в последней строке табл. 1.6. указана прибыль предприятия от продажи единицы каждого изделия. Определить план выпуска продукции, при котором будет получена максимальная прибыль.

Таблица 1.6

Табличный вид условия

Ресурсы	Нормы расхода ресурсов на единицу изделия			Объем ресурсов
	A	B	C	
Сталь, кг	10	70	10	57000
Цветные металлы, кг	20	50	10	49000
Токарные станки, станко-ч	300	400	100	560000
Фрезерные станки, станко-ч	200	100	100	340000
Прибыль, тыс. руб.	3	8	2	

Задача 1.4.

Предприятие располагает ресурсами сырья, рабочей силой и оборудованием, необходимыми для производства любого из четырех видов производимых товаров. Затраты ресурсов на изготовление единицы каждого вида товара, прибыль, получаемая предприятием, а также объем ресурсов указаны в табл.1.7. Определить оптимальный ассортимент при условии, что товаров 1 вида выпустят не более 10 ед., 2 вида не менее 8 ед., а 3 и 4 видов не менее 10 ед.

Таблица 1.7

Табличный вид условия

Ресурсы	Затраты ресурсов на единицу				Объем ресурсов
	1	2	3	4	
Сырье, кг	3	5	1	4	600
Рабочая сила, чел.	21	10	12	30	4000
Оборудование, станко-ч	10	14	8	16	16000
Прибыль на единицу товара, руб.	30	25	50	50	

Задача 1.5.

Фирма выпускает радиоприемники трех различных моделей: A, B, C. Каждое изделие указанных моделей приносит доход в размере 8, 15, 25 ед., соответственно. Необходимо, чтобы фирма выпускала за неделю не менее 100 приемников модели A, 150 модели B и 75 модели C. Каждая модель характеризуется определенным временем, необходимым для изготовления соответствующих деталей, сборки изделия и его упаковки. Так, в частности, в расчете на 10 приемников модели A требуется 3 ч. для изготовления деталей, 4 ч. на сборку и 1 ч. на упаковку. Соответствующие показатели в расчете на 10 приемников модели B равны 3,5, 5 и 1,5, а на 10 приемников модели C– 5, 8 и 3. В течение недели фирма может израсходовать на производство деталей 150 ч, на сборку 200 ч. и на упаковку 60 ч.

Составить задачу нахождения оптимального производственного плана. Привести ее к каноническому виду.

Задача 1.6.

Нефтеперерабатывающее предприятие использует два технологических процесса приготовления смесей. Технологический процесс 1 характеризуется следующими показателями: из 1 ед. объема сырой нефти A и 3 ед. объема сырой нефти B получают 5 ед. объема бензина X и 2 ед. объема бензина Y. Технологический процесс 2: из 4 ед. объема сырой нефти A и 2 ед. объема сырой нефти B получают 3 ед. объема бензина X и 8 ед. объема бензина Y. Запасы сырой нефти составляют 100 ед. объема нефти A и 150 ед. объема нефти B. По условию поставки, требуется произвести не менее 200 ед. объема бензина X и 75 ед. бензина Y. Доходы с 1 ед.

объема продукции, полученной с помощью технологических процессов 1 и 2, составляют 15 и 20 ед., соответственно.

Задача 1.7.

При составлении суточного рациона кормления скота можно использовать сено свежее (не более 50 кг) и силос (не более 85 кг). Рацион должен обладать определенной питательностью (число кормовых единиц не менее 30) и содержать питательные вещества: белок (не менее 1 кг), кальций (не менее 100 г) и фосфор (не менее 80 г). В следующей табл. 1.8. приведены данные о содержании указанных компонентов в 1 кг каждого продукта питания и стоимость этих продуктов.

Таблица 1.8

Табличный вид условия

Продукт	Количество кормовых единиц	Белок, г/кг	Кальций, г/кг	Фосфор, г/кг	Стоимость 1 кг, руб.
Сено	0,5	40	1,25	2	1,2
Силос	0,5	10	2,5	1	0,8

Задача 1.8.

Листы материала размером 6×13 надо раскроить так, чтобы получились заготовки двух типов: 800 шт. заготовок размером 4×5 и 400 шт. заготовок размером 2×3. Расход материала должен быть минимальным. Способы раскроя материала и количество получаемых при этом заготовок различных типов указаны в табл. 1.9.

Таблица 1.9

Табличный вид условия

Размер заготовки, м	Способы раскроя			
	1	2	3	4
4×5	3	2	1	0
2×3	1	6	9	13

2. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

2.1. Практическая часть

Пример 2.1.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции L(x) при ограничениях:

$$L(\overline{x}) = 3x_1 + 4x_2.$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 10, \\ x_1 + x_2 \leq 15, \\ x_1 - 3x_2 \leq -2, \\ 3x_1 - 2x_2 \geq -10, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Решение:

1) строим область допустимых решений (ОДР). Она представляет собой выпуклый четырехугольник ABDE;

2) строим вектор $\overline{c}$ (3; 4) и перпендикулярно ему линии уровня, проходящие через область;

3) наиболее удаленной в направлении градиента угловой точкой является точка D, так как через нее проходит самая дальняя линия уровня l_2. Следовательно, в точке D целевая функция принимает наибольшее значение, т. е. $L_{max}(x) = L(D)$. Через угловую точку A проходит ближайшая линия уровня l_1, следовательно, функция в точке A принимает наименьшее значение, т. е. $L_{min}(x) = L(A)$.

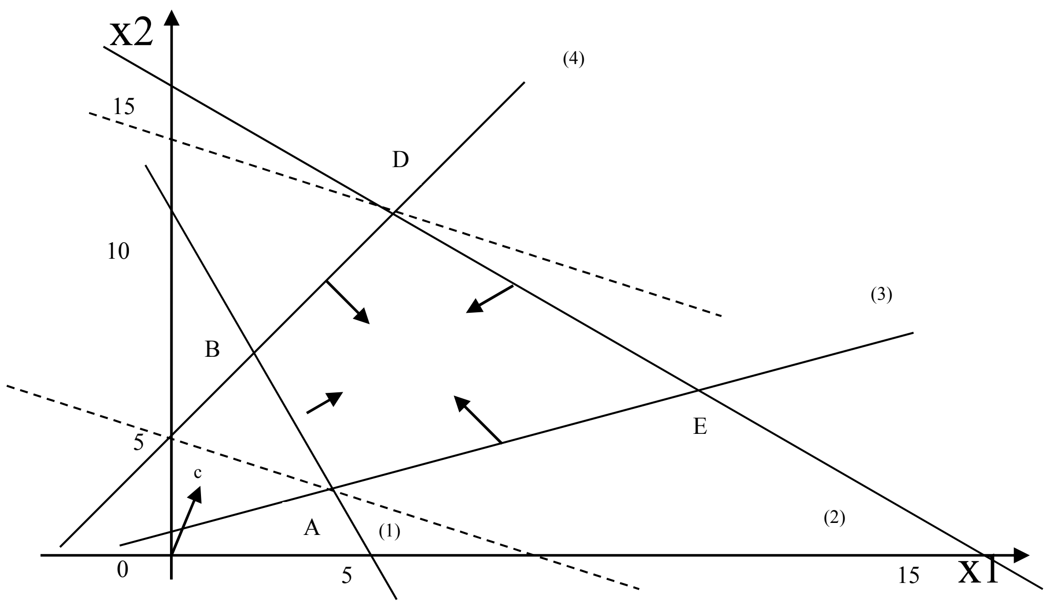


Рис. 1. Решение примера

4) чтобы найти координаты точек A и D, нужно решить систему из уравнений тех прямых, на пересечении которых лежат эти точки.

Точка A лежит на пересечении первой и третьей прямых.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ x_1 - 3x_2 = -2. \end{cases}$$

$$\overrightarrow{x_{min}}\ (4, 2), L_{min}(\bar{x}) = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 20.$$

Точка D лежит на пересечении второй и четвертой прямых.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 15, \\ 3x_1 - 2x_2 = -10. \end{cases}$$

Ответ:

$$\bar{x}_{max}(4, 11), L_{max} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 11 = 56.$$

Пример 2.2.

Найти наибольшее значение функции L(x) при ограничениях:

$$L(\bar{x}) = 2x_1 + 4x_2.$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 21, \\ 5x_1 - 11x_2 \le 0, \\ x_1 + 3x_2 \ge 15, \\ x_1 - x_2 \ge -6, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$

Решение:

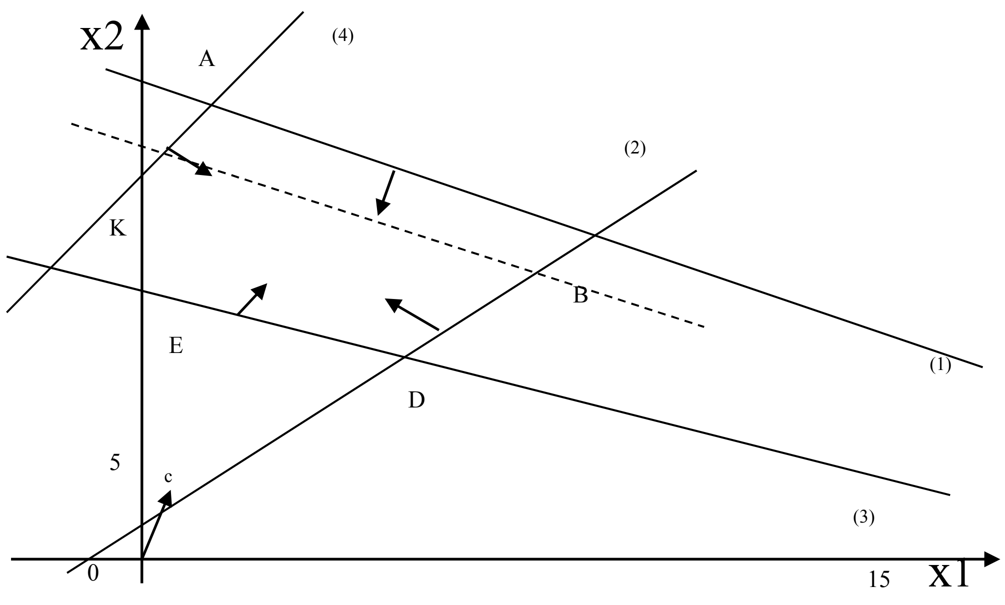


Рис. 2. Решение примера

1) строим область допустимых решений (ОДР). Она представляет собой выпуклый четырехугольник ABDE,

2) строим вектор $\bar{c}$ (2; 4) и перпендикулярно ему линии уровня, проходящие через область,

3) в данном случае линии уровня параллельны прямой, проходящей через точки A и B. Наибольшее значение целевая функция принимает в любой точке отрезка AB (случай альтернативного оптимума),

4) найдем координаты точек A и B:

Точка A лежит на пересечении первой и четвертой прямых.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 21, \\ x_1 - x_2 = -6, \end{cases}$$

$$x_1 = 3, x_2 = 9, A = (3; 9), \bar{x}_{1опт} = (3; 9), L_{max}(\bar{x}) = L(\bar{x}_{1опт}) = 42$$

Точка B лежит на пересечении первой и второй прямых.

$$x_1 = 11, x_2 = 5, B(11; 5), \bar{x}_{2опт} = (11; 5), L_{max}(\bar{x}) = L(\bar{x}_{2опт}) = 42$$

5) так как целевая функция принимает наибольшее значение в любой точке отрезка AB, то

Ответ:

$$\bar{x}_{опт} = t\bar{x} + (1 - t)\bar{x}_{2опт},\ \text{где}\ \ 0 \le t \le 1,\ \text{или}$$
$$\bar{x}_{опт} = (t \cdot 3 + (1 - t) \cdot 11;\ t \cdot 9 = (1 - t) \cdot 5) = (11 - 8t); 5 + 4t).$$

Пример 2.3.

Найти наибольшее значение функции L(x) при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2, \\ -2x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 - 2x_2 \le 4, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$
$$L(\bar{x}) = 2x_1 + 5x_2.$$

Решение:

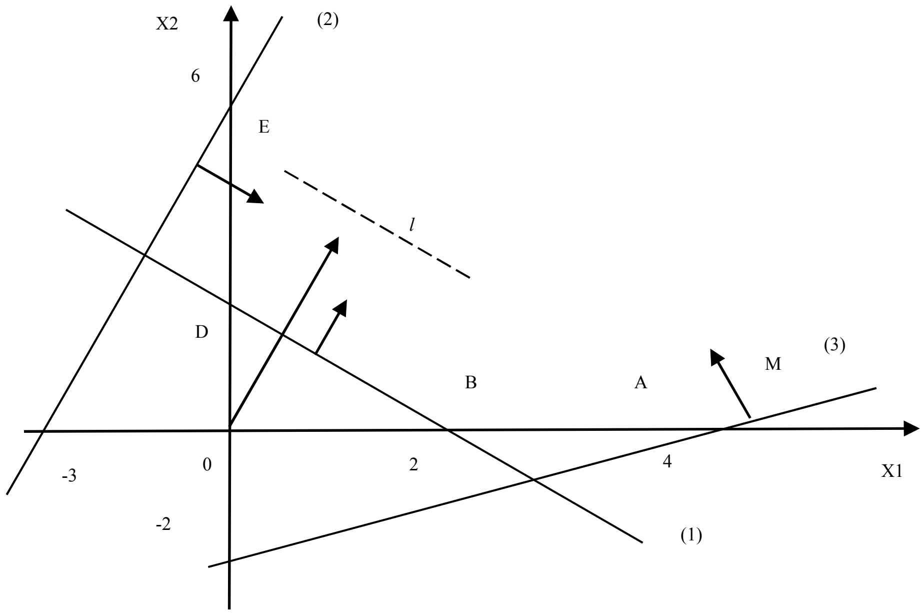


Рис. 3. Решение примера

1) ОДР представляет собой выпуклую неограниченную область в краевых точках M,A,B,D,E,

2) строим вектор $\bar{c}$ (2; 5) и перпендикулярно ему линии уровня, проходящие через область,

3) так как в направлении вектора $\bar{c}$ можно провести сколь угодно удаленную линию уровня, проходящую через ОДР, следовательно, функция в этой области не достигает своего наибольшего значения

Ответ:

$L(\bar{x}) \to \infty$.

Пример 2.4.

Найти наибольшее значение функции L(x) при ограничениях:

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + x_3 = 30, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + x_5 = 21, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}.$$

$$L(\bar{x}) = 5x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5.$$

Решение:

1) выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_3 = -30 + 5x_1 + 6x_2\,, \\ x_4 = 9 + \ 2x_1 - 3x_2, \\ x_5 = 21 - 7x_1 + 3x_2; \end{cases}$$

2) исключим базисные переменные из целевой функции, для этого в целевую функцию вместо базисных переменных подставим их выражения через свободные переменные, получим: L($\bar{x}$)= $-18 + 2x_1 + 4x_2$;

3) так как x_3 >0, x_4>0 и x_5>0, то получим систему неравенств,

$$\begin{cases} -30 + 5x_1 + 6x_2 \ \geq 0, \\ 9 + \ 2x_1 - 3x_2 \geq 0, \\ 21 - 7x_1 + 3x_2 \geq 0, \end{cases} \text{или} \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \ \geq 30, \\ 2x_1 - 3x_2 \geq -9, \\ 7x_1 + 3x_2 \geq -21, \end{cases}$$

4) исходная задача сведена к новой, которую можно решить графически:

$$\text{L}(\bar{x}) = -18 + 2x_1 + 4x_2.$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \ \geq 30, \\ 2x_1 - 3x_2 \geq -9, \\ 7x_1 + 3x_2 \geq -21. \end{cases}$$

5) найдем оптимальное решение исходной задачи, для этого найдем значения базисных переменных при x1 = 6 и x2 = 7.

Ответ:

$$x_3 = 42, x_4 = 0, x_5 = 0, \bar{\text{x}}_{1\text{опт}} = (6; 7; 42; 0; 0),$$

$$L_{max}(\bar{x}) = 86.$$

2.2. Задания для самостоятельной работы

Задача 2.1.

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 16, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ 4x_1 \ - 3x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$x_1 \ \geq 0, x_2 \ \geq 0,$$

$$\text{L}(\bar{x}) = 2x_1 - 3x_2.$$

Задача 2.2.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4, \\ 6x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 5x_2 \geq 4, \\ x_1 \leq 18, \\ x_2 \leq 3. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$L(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2.$$

Задача 2.3.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$L(\bar{x}) = x_1 - x_2 + x_3.$$

Задача 2.4.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1, \\ 2x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 - 2x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$L(\bar{x}) = x_1 + 3x_2.$$

Задача 2.5.

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ 7x_1 + 5x_2 \leq 35, \\ 2x_1 \leq 0, \\ 3x_2 \leq 18. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$L(\bar{x}) = 8x_1 + 6x_2.$$

Задача 2.6.

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \geq -3, \\ 6x_1 + x_2 \leq 42, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \geq 4. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$L(\bar{x}) = x_1 + 3x_2.$$

Задача 2.7.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,$$

$$L(\bar{x}) = x_1 + x_2.$$

Задача 2.8.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq -3, \\ 6x_1 + x_2 \leq 42, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \geq 4. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,$$

$$L(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 + x_5.$$

Задача 2.9.

$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ 2x_1 + x_2 \geq 6, \\ 5x_1 - x_2 \leq 45, \\ x_1 - x_2 \leq 6. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,$$

$$L(\bar{x}) = 2x_1 - 3x_2.$$

Задача 2.10.

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 15, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = -30. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,$$

$$L(\bar{x}) = x_1 - x_2.$$

3. СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.1. Практическая часть

Пример 3.1.

Решить систему линейных уравнений:

$$f = 2x_1+3x_2-x_3+x_4 \to min,$$
$$x_1+2x_3-x_4= 8,$$
$$x_2+x_3+x_4=5,$$
$$x_i \geq 0.$$

Решение:

1. Заполняется симплекс таблица с исходными данными:

i	Б	СБ	В	2	3	–1	1
				A_1	A_2	A_3	A_4
1			8	1	0	2	–1
2			5	0	1	1	1

Так как присутствует базис A_1A_2 (образует единичную матрицу) записываем его в столбец «Б», а столбец «СБ» будет состоять из коэффициентов целевой функции, соответствующих A_1A_2.

2. Рассчитаем m+1 строку:

i	Б	СБ	В	2	3	–1	1
				A_1	A_2	A_3	A_4
1	A_1	2	8	1	0	2	–1
2	A_2	3	5	0	1	1	1
m+1	F_i+C_i		31	0	0	8	0

Значение целевой функции стремится к min, все оценки в m+1 строке должны быть ≤ 0. Значение в столбце A_3>0, следовательно, план не оптимален.

3. Найдем значение $\theta_3 = min\left(\frac{8}{2},\frac{5}{1}\right) = 4$. Так как значение «4» достигается на первом из выбираемых элементов и соответствует 1 строке симплекс таблицы, то выбираем 3 столбец и 1 строку, разрешающим элементом становится «2».

Изменяем базис с A_1 на A_3 и заполняем 2 симплекс таблицу:

i	Б	СБ	В	2	3	–1	1
				A_1	A_2	A_3	A_4
1	A_1	2	8	1	0	2	–1
2	A_2	3	5	0	1	1	1
m+1	$f_i + C_i$		31	0	0	8	0
1	A_3	–1					
2	A_2	3					

4. Методом Гаусса делаем преобразования расширенной матрицы, так чтобы столбец A_3 стал базисным (разрешающий элемент должен быть равен 1, все остальные $a_{jk} = 0$). Для этого необходимо все элементы строки 1 (начиная со столбца В) разделить на «2», получим:

i	Б	СБ	В	2	3	–1	1
				A_1	A_2	A_3	A_4
1	A_1	2	8	1	0	2	–1
2	A_2	3	5	0	1	1	1
m+1	$f_i + C_i$		31	0	0	8	0
1	A_3	–1	4	1/2	0	1	–1/2
2	A_2	3					

Чтобы преобразовать вторую строку, из нее необходимо вычесть новую первую строку (по каждому элементу в отдельности):

i	Б	СБ	В	2	3	–1	1
				A_1	A_2	A_3	A_4
1	A_1	2	8	1	0	2	–1
2	A_2	3	5	0	1	1	1
m+1	$f_i + C_i$		31	0	0	8	0
1	A_3	–1	4	1/2	0	1	–1/2
2	A_2	3	1	–1/2	1	0	3/2

Рассчитаем строку m+1 для второй таблицы:

i	Б	СБ	В	2	3	–1	1
				A_1	A_2	A_3	A_4
1	A_1	2	8	1	0	2	–1
2	A_2	3	5	0	1	1	1
m+1	fi+ Ci		31	0	0	8	0
1	A_3	–1	4	1/2	0	1	–1/2
2	A_2	3	1	–1/2	1	0	3/2
m+1	fi+ Ci		–1	–4	0	0	4

Значение целевой функции стремится к min, все оценки в m+1 строке должны быть ≤ 0. Значение в столбце A_4>0, следовательно, план не оптимален. Переходим к шагу 3 заданного алгоритма, окончательный вариант симплекс таблицы будет:

i	Б	СБ	В	2	3	–1	1
				A_1	A_2	A_3	A_4
1	A_1	2	8	1	0	2	–1
2	A_2	3	5	0	1	1	1
m+1	fi+ Ci		31	0	0	8	0
1	A_3	–1	4	1/2	0	1	–1/2
2	A_2	3	1	–1/2	1	0	3/2
m+1	fi+ Ci		–1	–4	0	0	4
1	A_3	–1	13/3	1/3	1/3	1	0
2	A_4	1	2/3	–1/3	2/3	0	1
m+1	fi+ Ci		–11/3	–8/2	–8/3	0	0

Значение целевой функции стремится к min, все оценки в m+1 строке должны быть ≤ 0, план оптимален.

Ответ: X^*={0,0,13/3,2/3}, $f_{\min}$ = –11/3.

Пример 3.2.

Решить систему линейных уравнений:

$$2x_1+3x_2-x_3+x_4 \to min,$$
$$x_1+2x_3-x_4= 8,$$
$$x_2+x_3+2x_4=5,$$
$$x_i \geq 0.$$

Решение:

1. Заполняется симплекс таблица с исходными данными и рассчитывается m+1 строка:

i	Б	СБ	В	2	3	–1	4
				A_1	A_2	A_3	A_4
1	A_2	3	8	0	1	3	1
2	A_1	2	5	1	0	1	2
m+1	fi+ Ci		34	0	0	12	3

Значение целевой функции стремится к min, все оценки в m+1 строке должны быть ≤ 0. Значение в столбцах A_3 и A_4>0, следовательно, план не оптимален.

2. Найдем значение $\theta_3 = min\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{1}\right) = \frac{8}{3}$, $\theta_4 = min\left(\frac{8}{1}, \frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}$. Умножаем каждое θ_k на соответствующую оценку из m+1 строки и выбираем максимальное значение: $\frac{8}{3} * 12 = 32$ и $\frac{5}{2} * 3 = 7{,}5$. Максимальное из этих двух значений 32 достигается в 3 столбце, таким образом выбираем 3 столбец и 1 строку (так как минимальное значение $\frac{8}{3}$ было достигнуто на первом значении). Разрешающим элементом становится «3».

Изменяем базис с A_1 на A_3 и заполняем 2 симплекс таблицу:

i	Б	СБ	В	2	3	–1	4
				A_1	A_2	A_3	A_4
1	A_2	3	8	0	1	3	1
2	A_1	2	5	1	0	1	2
m+1	fi+ Ci		34	0	0	12	3
1	A_3	–1	8/3	0	1/3	1	1/3
2	A_1	2	7/3	1	–1/3	0	5/3
m+1	fi+ Ci		2	0	–4	0	–1

Значение целевой функции стремится к min, все оценки в m+1 строке должны быть ≤ 0, план оптимален.

Ответ: X^*={7/3,0,8/3,0}, $f_{\min}$ = 2.

Пример 3.3.
Решить систему линейных уравнений:

$$f = x_1+2x_2-x_3+x_4+x_5 \to min,$$
$$x_1-2x_2+x_3=1,$$
$$x_3+x_4=2,$$
$$x_2-x_3+x_5=3,$$
$$x_i \geq 0.$$

Решение:

i	Б	СБ	B	$C1$=1	$C2$=2	$C3$= –1	$C4$=1	$C5$=1
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_1	1	1	1	–2	1	0	0
2	A_4	1	2	0	0	1	1	0
3	A_5	1	3	0	1	–1	0	1
m+1	fi+ Ci		6	0	–3	2	0	0
1	A_3	-1	1	1	–2	1	0	0
2	A_4	1	1	–1	2	0	1	0
3	A_5	1	4	1	–1	0	0	1
m+1	fi+ Ci		4	–2	1	0	0	0
1	A_3	–1	2	0	0	1	1	0
2	A_2	2	1/2	–1/2	1	0	1/2	0
3	A_5	1	9/2	1/2	0	0	1/2	1
m+1	fi+ Ci		7/2	-3/2	0	0	-1/2	0

Ответ: $X^*=\{0,1/2,2,0,9/2\}$, $f_{min}=7/2$.

Пример 3.4.
Решить систему линейных уравнений:

$$f(x)= x_1-2x_2+3x_3 \to min,$$
$$-2x_1+x_2+3x_3 \leq 2,$$
$$2x_1+3x_2+4x_3 \leq 1,$$
$$x_i \geq 0.$$

Решение:

Так как в условии задачи даны неравенства, а решать задачи линейного программирования симплекс методом можно только на равенства, то необходимо свести неравенства к равенству методом прибавления, к левым частям неотрицательные дополнительные переменные. В целевую функцию дополнительные переменным добавляются с коэффициентами равные нулю.

Система будет иметь вид:

$$f(x)= x_1-2x_2+3x_3+0x_4+0x_5\rightarrow \min,$$
$$-2x_1+x_2+3x_3+x_4= 2,$$
$$2x_1+3x_2+4x_3+x_5= 1,$$
$$x_i\geq 0.$$

i	Б	СБ	В	1	–2	3	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_4	0	2	–2	1	3	1	0
2	A_5	0	1	2	3	4	0	1
m+1	f*i*+ C*i*		0	–1	2	–3	0	0
1	A_4	0	5/3	–8/3	0	5/3	1	1/3
2	A_2	–2	1/3	2/3	1	4/3	0	1/3
m+1	f*i*+ C*i*		–2/3	–7/3	0	–17/3	0	–2/3

Ответ: $X^*=\{0,1/3,0,5/3,0\}$, $f_{\min}=-2/3$.

Пример 3.5.

Решить систему линейных уравнений:

$$f = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \rightarrow \min,$$
$$x_1 + x_2+x_3 \geq 5,$$
$$x_1 - x_2+2x_3 \geq 1,$$
$$x_1 - x_2-4x_3 \leq -3,$$
$$x_1 - x_2+2x_3 \geq 4,$$
$$x_i \geq 0.$$

Решение:

Так как правая часть неравенств должна быть положительной, то третье ограничение приводим к виду $-x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 3$ умножив обе части ограничения на «–1»:

i	Б	СБ	В	5	1	3	4	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1	A_5	0	4	1	1	–1	1	1	0	0
2	A_6	0	5	1	–1	1	–1	0	1	0
3	A_7	0	6	1	2	4	8	0	0	1
m+1	f^i+C^i		0	–5	–1	–3	–4	0	0	0
1	A_1	5	4	1	1	–1	1	1	0	0
2	A_6	0	1	0	–2	2	–2	–1	1	0
3	A_7	0	2	0	1	5	7	–1	0	1
m+1	f^i+C^i		20	0	4	–8	1	5	0	0
1	A_1	5	22/5	1	6/5	0	12/5	4/5	0	1/5
2	A_6	0	1/5	0	–12/5	0	–24/5	–3/5	1	–2/5
3	A_3	3	2/5	0	1/5	1	7/5	–1/5	0	1/5
m+1	f^i+C^i		116/5	0	25/5	0	61/5	17/5	0	8/5

Ответ: X^*={22/5,0,2/5,0,0,1/5,0}, f_{min}=116/5.

Пример 3.6.

Решить систему линейных уравнений:

$$f= x_1+x_2+x_3 + x_4 \rightarrow \max,$$
$$x_1+3x_2+x_3+2x_4 =5,$$
$$2x_1-x_3+x_4 =1,$$
$$x_i \geq 0.$$

Решение:

Заполним первую таблицу:

i	Б	СБ	В	1	1	1	1	$–M$	$–M$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_5	$–M$	5	1	3	1	2	1	0
2	A_6	$–M$	1	2	0	–1	1	0	1
m+1	fi+ Ci								
m+2									

Для удобства вычислений в строку m+1 запишем слагаемое, независимое от M, а в строку m+2 – только коэффициенты при M, которые и позволяют сравнивать оценки между собой.

i	Б	СБ	В	1	1	1	1	$-M$	$-M$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_5	$-M$	5	1	3	1	2	1	0
2	A_6	$-M$	1	2	0	–1	1	0	1
m+1	$fi + Ci$		0	–1	–1	–1	–1	0	0
m+2			–6	–3	–3	0	–3	0	0

Все оценки в строке m+2 должны быть положительные, так как целевая функция стремится к максимуму. Условие оптимальности не выполняется, переходим к следующему этапу.

i	Б	СБ	В	1	1	1	1	$-M$	$-M$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_5	$-M$	5	1	3	1	2	1	0
2	A_6	$-M$	1	2	0	–1	1	0	1
m+1	fi+ Ci		0	–1	–1	–1	–1	0	0
m+2			–6	–3	–3	0	–3	0	0
1	A_2	1	5/3	1/3	1	1/3	2/3	1/3	0
2	A_6	$-M$	1	2	0	–1	1	0	1
m+1	$fi + Ci$		5/3	–2/3	0	–2/3	–1/3	1/3	0
m+2			–1	–2	0	1	–1	1	0
1	A_2	1	1	–1	1	1	0	1/3	–2/3
2	A_4	1	1	2	0	–1	1	0	1
m+1	$fi + Ci$		2	0	0	–1	0	1/3	1/3
m+2			0	0	0	0	0	1	1

Так как $A_5 A_6$ вышли из базиса, то нет необходимости в m+2 строке:

i	Б	СБ	В	1	1	1	1
				A_1	A_2	A_3	A_4
1	A_2	1	1	–1	1	1	0
2	A_3	1	2	1	1	0	1
m+1	$fi+Ci$		3	–1	1	0	0
1	A_2	1	3	0	2	1	1
2	A_1	1	2	1	1	0	1
m+1	$fi+Ci$		5	0	2	0	1

Ответ: X^*={2,3,0,0}, f_{max}=5.

Пример 3.7.
Решить систему линейных уравнений:

$$3x_1+7x_2+6x_3+5x_4 \to \min,$$
$$4x_1+3x_2+2x_3-x_4=7,$$
$$x_1-2x_2-5x_3-3x_4=-12,$$
$$x_i \geq 0.$$

Решение:

i	Б	СБ	В	3	7	6	5	M	M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_5	M	7	4	3	2	–1	1	0
2	A_6	M	12	–1	2	5	3	0	1
m+1	$fi+Ci$		0	–3	–7	–6	–5	0	0
m+2			19	3	5	7	2	0	0
1	A_5	M	11/5	22/5	11/5	0	–11/5	1	–2/5
2	A_3	6	12/5	–1/5	2/5	1	3/5	0	1/5
m+1	$fi+Ci$		72/5	–21/5	–23/5	0	–7/5	0	6/5
m+2			11/5	22/5	11/5	0	–11/5	0	–7/5
1	A_1	3	1/2	1	1/2	0	–1/2	5/22	–1/11
2	A_3	6	5/2	0	1/2	1	1/2	1/22	2/11
m+1	$fi+Ci$		33/2	0	–5/2	0	–17/2	21/22	9/11
m+2			0	0	0	0	0	–1	–1

Ответ: X^*={1/2,0,5/2,0}, f_{min}=33/2.

Пример 3.8.
Решить систему линейных уравнений:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max,$$
$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 8,$$
$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = -6,$$
$$x_1 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 2,$$
$$x_i \geq 0.$$

Решение:

i	Б	СБ	B	1	2	1	1	1	$-M$	$-M$	$-M$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
1	A_6	$-M$	8	1	4	2	2	1	1	0	0
2	A_7	$-M$	6	–1	2	–2	–2	1	0	1	0
3	A_8	$-M$	2	1	0	2	2	–1	0	0	1
m+1	$fi+Ci$		0	–1	–2	–1	–1	–1	0	0	0
m+2			–16	–1	–6	–2	–2	–1	0	0	0
1	A_2	2	2	1/4	1	1/2	1/2	1/4	1/4	0	0
2	A_7	$-M$	2	–3/2	0	–3	–3	1/2	–1/2	1	0
3	A_8	$-M$	2	–1	0	2	2	–1	0	0	1
m+1	$fi+Ci$		4	–1/2	0	0	0	–1/2	1/2	0	0
m+2			–4	1/2	0	1	1	1/2	3/2	0	0

Ответ: решений нет, система несовместима.

Пример 3.9.
Решить систему линейных уравнений:

$$x_1 - 8x_2 + x_3 + 4x_4 \to \max,$$
$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0,$$
$$x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 3.$$

Решение:

<table>
<tr><td rowspan="2">i</td><td rowspan="2">Б</td><td rowspan="2">СБ</td><td rowspan="2">В</td><td>1</td><td>–8</td><td>1</td><td>4</td><td>M</td><td>M</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>A_2</td><td>A_3</td><td>A_4</td><td>A_5</td><td>A_6</td></tr>
<tr><td>1</td><td>A_5</td><td>$-M$</td><td>0</td><td>1</td><td>–1</td><td>–1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>A_6</td><td>$-M$</td><td>3</td><td>1</td><td>8</td><td>2</td><td>–5</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>m+1</td><td colspan="2" rowspan="2">$fi+Ci$</td><td>0</td><td>–1</td><td>8</td><td>–1</td><td>–4</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>m+2</td><td>–3</td><td>–2</td><td>–7</td><td>–1</td><td>4</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>A_5</td><td>$-M$</td><td>3/8</td><td>9/8</td><td>0</td><td>–6/8</td><td>3/8</td><td>1</td><td>1/8</td></tr>
<tr><td>2</td><td>A_2</td><td>–8</td><td>3/8</td><td>1/8</td><td>1</td><td>2/8</td><td>–5/8</td><td>0</td><td>1/8</td></tr>
<tr><td>m+1</td><td colspan="2" rowspan="2">$fi+Ci$</td><td>–3</td><td>–2</td><td>0</td><td>–3</td><td>1</td><td>0</td><td>–1</td></tr>
<tr><td>m+2</td><td>–3/8</td><td>–9/8</td><td>0</td><td>6/8</td><td>–3/8</td><td>0</td><td>7/8</td></tr>
<tr><td>1</td><td>A_1</td><td>1</td><td>1/3</td><td>1</td><td>0</td><td>–6/9</td><td>3/9</td><td>8/9</td><td>1/9</td></tr>
<tr><td>2</td><td>A_2</td><td>–8</td><td>1/3</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>–2</td><td>–1/9</td><td>1/9</td></tr>
<tr><td>m+1</td><td colspan="2" rowspan="2">$fi+Ci$</td><td>–7/3</td><td>0</td><td>0</td><td>–29/3</td><td>37/3</td><td>16/9</td><td>–7/9</td></tr>
<tr><td>m+2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

Ответ: решений нет, система несовместима.

3.2. Задания для самостоятельной работы

Задача 3.1.

Решить симплекс-методом следующую задачу:

$$Z = x_1 - x_2 + x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 \geq 0, \\ x_1 + x_3 \geq 1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1, \\ -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 \geq 3. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2,3).$$

Задача 3.2.
Решить симплекс-методом следующую задачу:

$$Z = 10x_1 - 7x_2 - 5x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 15x_2 + 6x_3 \le 9, \\ 14x_1 + 42x_2 - 16x_3 \le 12, \\ 2x_1 + 8x_2 + 16x_3 \le 4. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = 1,2,3).$$

Задача 3.3.
Решить симплекс-методом следующую задачу:

$$Z = x_1 - 3x_2 + x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 7, \\ -2x_1 + 4x_2 \le 12, \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = 1,2,3).$$

Задача 3.4.
Решить симплекс-методом следующую задачу:

$$Z = 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = 1,2,3,4).$$

Задача 3.5.
Решить симплекс-методом следующую задачу:

$$Z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 \le 8, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ge 7. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = 1,2,3).$$

Задача 3.6.
Решить симплекс-методом следующую задачу:

$$Z = 12x_1 + 27x_2 + 6x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 6, \\ 6x_1 + 9x_2 - 2x_3 \ge 22, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \ge 14. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = 1,2,3).$$

Задача 3.7.
Решить симплекс-методом следующую задачу:

$$Z = 8x_1 + 18x_2 + 6x_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 6x_3 \geq 24, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 8. \end{cases}$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2,3).$$

Задача 3.8.
Решить симплекс-методом следующую задачу:

$$Z = 3x_1 - x_2 + x_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 18, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 12, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 18. \end{cases}$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2,3).$$

Задача 3.9.
Решить симплекс-методом следующую задачу:

$$Z = -3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 7, \\ -x_1 + x_3 \leq 2, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 4. \end{cases}$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2,3).$$

Задача 3.10.
Решить симплекс-методом следующую задачу:

$$Z = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to \min,$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2,3,4).$$

4. ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

4.1. Практическая часть

Пример 4.1.

Составить двойственную задачу к следующей: найти наибольшее значение функции

$L(\overline{x}) = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 \le 4, \\ 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 \le 10, \end{cases} \left| \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \right.$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, x_3 и x_4 свободны по знаку.

Двойственная задача: найти наименьшее значение функции

$S(\overline{y}) = 5y_1 + 6y_2 + 4y_3 + 10y_4$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 + 3y_4 \ge 2, \\ 3y_1 + 2y_2 - y_3 + 3y_4 \ge 3, \\ 2y_1 - 3y_2 + y_3 - 4y_4 = -1, \\ -4y_1 + y_2 + 2y_3 + 5y_4 = 4, \end{cases}$$

y_1, y_2 свободны по знаку, $y_3 \ge 0$, $y_4 \ge 0$.

Нахождение решения двойственных задач

Первый способ нахождения решения двойственной задачи в симметричной паре основан на применении основных теорем двойственности.

Первая теорема двойственности: если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая имеет оптимальное решение, причем для оптимальных решений $\overline{x_0}$ и $\overline{y_0}$ выполняется равенство:

$L\left(\overline{x_0}\right) = S\left(\overline{y_0}\right)$.

Если целевая функция одной из задач не ограничена на ОДР, то система ограничений двойственной задачи не совместна, и наоборот.

Следствие из второй теоремы двойственности: если на оптимальном решении одной из двойственных задач какое-либо ограничение этой задачи выполняется как строгое неравенство, то соответствующая переменная в оптимальном решении другой задачи равна нулю. Если в оптимальном решении одной из двойственных задач какая-либо переменная положительна, то соответствующее ей ограничение в другой задаче на оптимальном решении выполняется как равенство.

Пример 4.2.

Дана задача линейного программирования в неканоническом виде

$L(\overline{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 \le 240, & \Big| y_1 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 200, & \Big| y_2 \\ 9x_1 + 4x_2 \le 360, & \Big| y_3 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.

Данная задача имеет оптимальное решение

$\overline{x}_{\text{опт}} = (23{,}53;\ 21{,}18),\ L_{\max} = 110{,}6.$

Составим двойственную задачу:

$S(\overline{y}) = 240y_1 + 200y_2 + 360y_3 \to \min$

$$\begin{cases} 3y_1 + 4y_2 + 9y_3 \ge 2, & \Big| x_1 \ne 0 \\ 8y_1 + 5y_2 + 4y_3 \ge 3 & \Big| x_2 \ne 0 \end{cases}$$

$y_i \ge 0$, $i = \overline{1,3}$.

Из первой теоремы двойственности следует, что $L_{max} = S_{min} = 110{,}6$.

Применим вторую теорему двойственности: так как в оптимальном решении исходной задачи $x_1 \ne 0$ и $x_2 \ne 0$, то на оптимальном решении двойственной задачи первое и второе ограничения двойственной задачи выполняются как равенства

$$\begin{cases} 3y_1 + 4y_2 + 9y_3 = 2, \\ 8y_1 + 5y_2 + 4y_3 = 3. \end{cases}$$

Подставим $\overline{x}_{\text{опт}}$ в ограничения исходной задачи и получим, что третье ограничение выполняется как строгое неравенство:

$9 \cdot 23{,}53 + 4 \cdot 21{,}18 = 296{,}49$, т. е. $296{,}49 < 360 \Rightarrow y3 = 0$.

Получим систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 3y_1 + 4y_2 + 9y_3 = 2, \\ 8y_1 + 5y_2 + 4y_3 = 3, \\ y_3 = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3y_1 + 4y_2 = 2, \\ 8y_1 + 5y_2 = 3. \end{cases}$$

Решая систему, получим $\overline{y}_{\text{опт}} = (2/17; 7/17; 0)$.

Второй способ нахождения решения двойственной задачи в симметричной паре основан на использовании симплексного метода.

Если одна из двойственных задач решена симплексным методом, то оптимальное решение двойственной задачи можно найти из оценочной строки последней итерации. Для этого нужно установить соответствие между основными переменными одной задачи и балансовыми переменными двойственной задачи.

Запишем системы ограничений симметричной пары двойственных задач:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \,\Big|\, y_i, \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \ge c_j \,\Big|\, x_j.$$

Приведем их к каноническому виду:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b, \;\Big|\, y_i, \; \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i - x_{m+j} = c_j, \;\Big|\, y_j,$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$, – основные, $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ – балансовые; $y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_{m+n}$ – балансовые, $y_1\ y_2 \dots, y_m$ основные.

Если исходная задача решена симплексным методом, то

$$y_i = \left|\Delta_{n+i}\right|,\; i = \overline{1,m},$$

где Δ_{n+i} симплексные оценки переменных исходной задачи. Если двойственная задача решена симплексным методом, то

$$x_j = \left|\Delta_{m+j}\right|,\; j = \overline{1,n},$$

где Δ_{m+j} симплексные оценки переменных двойственной задачи.

Пример 4.3.

Найти наименьшее значение функции

$L(\overline{x}) = 2x_1 + x_2 + 3x_3$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 5, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 8, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 \geq 4, \end{cases} \left| \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix} \right.$$

$x_i \geq 0 \qquad j = \overline{1,3}.$

Решение. Составим двойственную задачу:

$S(\overline{y}) = 5y_1 + 8y_2 + 4y_3 \to \max$,

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + 2y_3 \leq 2, \\ y_1 + y_2 - y_3 \leq 1, \\ y_1 - y_2 - 2y_3 \leq 3, \end{cases} \left| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \right.$$

$y_i \geq 0$, $i = \overline{1,3}$.

Пример 4.4.

Найти наибольшее значение функции

$L(\overline{x}) = x_1 + 7x_2 - 5x_3 + 3x_4$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5, \end{cases} \left| \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix} \right.$$

$x_i \geq 0 \qquad j = \overline{1,4}.$

Данная задача имеет оптимальное решение

$\overline{x}_{\text{опт}} = (0, 14, 9, 0)$, $L_{max} = 53$.

Составим двойственную задачу: найти наименьшее значение функции $S(\overline{y}) = 6y_1 + 5y_2$

при ограничениях:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \geq 1, \\ 3y_1 + y_2 \geq 7, \\ -4y_1 - y_2 \geq -5, \\ -5y_1 + y_2 \geq -5, \end{cases} \left| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} \right.$$

y_1 и y_2 свободны по знаку.

По первой теореме двойственности $L_{max} = S_{min} = 53$.

По второй теореме двойственности, так как в оптимальном решении исходной задачи $x_2 \neq 0$ и $x_3 \neq 0$, то, выписывая второе и третье ограничения двойственной задачи как уравнения, получим систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 = 7, \\ -4y_1 - y_2 = -5. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $y_1 = -2$ и $y_2 = 13$, $\overline{y}_{\text{опт}} = (-2; 13)$.

Экономическая интерпретация двойственных задач.

Рассмотрим экономическую интерпретацию двойственных задач на примере задачи об оптимальном использовании ресурсов.

Исходная задача: найти наибольшее значение функции

$$L(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при ограничениях: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overline{1,m}$; $x_j \geq 0, j = \overline{1,n}$.

Двойственная задача: найти наименьшее значение функции

$$S(\overline{y}) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

при ограничениях: $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, j = \overline{1,n}$; $y_i \geq 0, i = \overline{1,m}$.

Установим размерность двойственных переменных y_i, которые еще называют двойственными оценками.

Из ограничений двойственной задачи $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$ следует, что размерность произведения $a_{ij} y_i$ совпадает с размерностью c_j, т. е $a_{ij} y_i \cong c_j$ (знак ≅ означает эквивалентность размерности), отсюда

$$\frac{\text{Рубли / Единица продукции}}{\text{Единица ресурса / Единица продукции}} = \frac{\text{Рубли}}{\text{Единица ресурса}}$$

Таким образом, y_i измеряется в рублях на единицу ресурса. Назовем y_i условной ценой или оценкой i-го ресурса.

Рассмотрим свойства оценок.

Оценки y_i – мера дефицитности ресурса. Дефицитный ресурс полностью используется при оптимальном плане и имеет положительную оценку, т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{\text{опт}} = b_i \, , \; y_j^{\text{опт}} > 0.$$

Недефицитный ресурс используется не полностью и имеет нулевую оценку, так как если $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{\text{опт}} < b_i \, , \; y_j^{\text{опт}} = 0.$

Оценки y_i – мера влияния свободных членов системы ограничений исходной задачи на значение елевой функции, так как

$$L\left(\overline{x}_{\text{опт}}\right) = S\left(\overline{y}_{\text{опт}}\right) \text{, т. е. } S\left(\overline{y}\right) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \, , \; \frac{ds}{db_i} = y_i \, ,$$

$$\Delta S \approx y_i \Delta b_i \Rightarrow \Delta S = \Delta L \approx y_i \Delta b_i \; ,$$

$$\Delta L \approx y_i \Delta b_i \; .$$

Прирост прибыли пропорционален приращению i-го ресурса, причем коэффициент пропорциональности равен y_i чем больше y_i тем эффективнее i-й ресурс.

Пример 4.5.

Рассмотрим задачу определения плана выпуска продукции, дающего наибольшую прибыль

$$L(\overline{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 \le 240, & \bigg| \, y_1 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 200, & \bigg| \, y_2 \\ 9x_1 + 4x_2 \le 360, & \bigg| \, y_3 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0 \; .$$

Составим двойственную задачу:

$$S(\overline{y}) = 240y_1 + 200y_2 + 360y_3 \to \min \, ,$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 4y_2 + 9y_3 \ge 2, & \bigg| \, x_1 \\ 8y_1 + 5y_2 + 4y_3 \ge 3, & \bigg| \, x_2 \end{cases}$$

$$y_i \ge 0 \, , \, i = \overline{1,4} .$$

Найдем решения обеих задач: $\overline{x}_{\text{опт}}$ = (23,53; x2 =21,18), $\overline{y}_{\text{опт}}$ = (2/17; 7/17; 0), $L_{max} = S_{min}$ =110,6.

В оптимальном решении двойственной задачи y_3 = 0, следовательно, третий вид сырья недефицитный, т. е. при $\overline{x}_{\text{опт}}$ расходуется не полностью. y_1>0 и y_2>0, следовательно, первое и второе сырье дефицитное, и поскольку $y_2 > y_1$, второе сырье оказывает большее влияние на прибыль, есть смысл увеличивать в первую очередь запасы второго сырья.

4.2. Задания для самостоятельной работы

Дана задача линейного программирования. Составить двойственную к ней задачу. Найти оптимальное решение обеих задач.

Задача 4.1.

$L(\overline{x}) = 2x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \ge 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 \ge 2, \end{cases}$$

$x_j \ge 0$, $j = \overline{1,3}$.

Задача 4.2.

$L(\overline{x}) = 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 3, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \ge 1, \end{cases}$$

$x_j \ge 0$, $j = \overline{1,3}$.

Задача 4.3.

$L(\overline{x}) = 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 \le 1, \end{cases}$$

$x_j \ge 0$, $j = \overline{1,4}$.

Задача 4.4.

$L(\overline{x}) = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \ge 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \le -3, \\ x_1 - x_2 + 8x_3 \ge 4, \end{cases} \quad x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

Задача 4.5.

$L(\overline{x}) = 2x_1 + 3x_2 + 2{,}5x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 6, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \ge 16, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 12, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$

Задача 4.6.

$L(\overline{x}) = x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 9, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$

Задача 4.7.

$L(\overline{x}) = 2x_1 - x_2 + x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 10, \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 7, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$

Задача 4.8.

$L(\overline{x}) = 2x_1 - x_3 + x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -2, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$

Задача 4.9.

$L(\overline{x}) = x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \end{cases}$$

$x_j \geq 0$, $j = \overline{1,4}$.

Задача 4.10.

$L(\overline{x}) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + 9x_5 = 18, \\ x_1 + 5x_2 \qquad\quad + 2x_4 + 8x_5 = 13, \end{cases}$$

$x_j \geq 0$, $j = \overline{1,5}$.

5. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

5.1. Практическая часть

Пример 5.1.

Задание. Из трех холодильников A_i, $i = \overline{1,3}$, вмещающих мороженую рыбу в количествах a_i т, необходимо последнюю доставить в пять магазинов B_j , $j = \overline{1,5}$ *в* количествах b_j т. Стоимости перевозки 1 т рыбы из холодильника A_i в магазин B_j заданы в виде матрицы $C = ((c_{ij}))$, 3×5.

Написать математическую модель задачи и спланировать перевозки так, чтобы их общая стоимость была минимальной.

a_1= 320 b_2= 140

a_2=280 b_3= 110

a_3=250 b_4= 230

b_1= 150 b_5= 220

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 23 & 20 & 15 & 24 \\ 29 & 15 & 16 & 19 & 29 \\ 6 & 11 & 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Решение. Составим математическую модель задачи. Пусть x_{ij} – количество т рыбы, перевозимой из холодильника (поставщика) A_i в магазин (потребитель) B_j. Тогда задача заключается в минимизации общих транспортных расходов:

$$z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

при ограничениях $\begin{cases} \sum_{j=1}^{5} x_{ij} = a_i, i = \overline{1,3} \\ \sum_{i=1}^{3} x_{ij} = b_j, j = \overline{1,5} \end{cases}$

Задача имеет закрытый тип, т. к. запасы груза 320+280+250 = 850 т равны суммарным потребностям магазинов 150+140+110+230+220 = 850 т.

Составим опорный план по правилу минимального элемента.

Введем некоторые обозначения: A*i** – излишек нераспределенного груза от поставщика A*i*, B*j** – недостача в поставке груза потребителю B*j*.

Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (3,1). Помещаем туда меньшее из чисел A3*=250 и B1*=150.

Склад	Магазин					Запасы груза
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	20 0	23 0	20 0	15 0	24 0	320
A2	29 0	15 0	16 0	19 0	29 0	280
A3	6 0	11 0	10 0	9 0	8 0	250
Потребность	150	140	110	230	220	

Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (3,5). Помещаем туда меньшее из чисел A3*=100 и B5*=220.

Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (1,4). Помещаем туда меньшее из чисел A1*=320 и B4*=230.

Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (2,2). Помещаем туда меньшее из чисел A2*=280 и B2*=140.

Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (2,3). Помещаем туда меньшее из чисел A2*=140 и B3*=110. Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (1,5). Помещаем туда меньшее из чисел A1*=90 и B5*=120.

Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (2,5). Помещаем туда меньшее из чисел A2*=30 и B5*=30.

Пришли к таблице:

Склад	Магазин					Запасы груза
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	20	23	20	15 **230**	24 **90**	320
A2	29	15 **140**	16 **110**	19	29 **30**	280
A3	6 **150**	11	10	9	8 **100**	250
Потребность	150	140	110	230	220	

Транспортные расходы составят z = 12040.

Решим задачу методом потенциалов. Т. к. $m+n-1=7$ и имеем 7 загруженных клеток, план ацикличный. Пусть U_i и V_j – потенциалы i-го склада и j-го магазина соответственно.

Полагая потенциал $U_1=0$, определяем остальные потенциалы из соотношения $U_i+V_j=C_{i,j}$, просматривая все занятые клетки.

Получим:

$U_1 = 0.$

$V_4 = C_{1,4} - U_1 = 15.$

$V_5 = C_{1,5} - U_1 = 24.$

$U_2 = C_{2,5} - V_5 = 5.$

$U_3 = C_{3,5} - V_5 = -16.$

$V_2 = C_{2,2} - U_2 = 10.$

$V_3 = C_{2,3} - U_2 = 11.$

$V_1 = C_{3,1} - U_3 = 22.$

Для свободных клеток определим значения оценок (разностей между прямыми и косвенными тарифами).

$S_{1,1} = C_{1,1} - (U_1 + V_1) = -2.$

$S_{1,2} = C_{1,2} - (U_1 + V_2) = 13.$

$S_{1,3} = C_{1,3} - (U_1+V_3) = 9.$

$S_{2,1} = C_{2,1} - (U_2 + V_1) = 2.$

$S_{2,4} = C_{2,4} - (U_2 + V_4) = -1.$

$S_{3,2} = C_{3,2} - (U_3 + V_2) = 17.$

$S_{3,3} = C_{3,3} - (U_3 + V_3) = 15.$

$S_{3,4} = C_{3,4} - (U_3 + V_4) = 10.$

Имеем две клетки с отрицательными оценками – (1,1) и (2, 4). Выбираем клетку с наименьшей оценкой (1, 1) и строим для нее цикл.

Склад	Магазин					Запасы груза
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	+ 20	23	20	15 **230**	– 24 **90**	320
A2	29	15 **140**	16 **110**	19	29 **30**	280
A3	– 6 **150**	11	10	9	+ 8 **100**	250
Потребность	150	140	110	230	220	

Перемещаем по циклу груз величиной в 90 единиц, прибавляя эту величину к грузу в клетках со знаком "плюс" и отнимая ее от груза в клетках со знаком «минус».

В результате перемещения по циклу получим новый план.

Склад	Магазин					Запасы груза
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	20 **90**	23	20	15 **230**	24	320
A2	29	15 **140**	16 **110**	19	29 **30**	280
A3	6 **60**	11	10	9	8 **190**	250
Потребность	150	140	110	230	220	

Целевая функция (транспортные расходы) z = 11860. Значение целевой функции изменилось на 180 единиц по сравнению с предыдущим этапом.

Проверим полученный план на оптимальность.

Подсчитаем потенциалы.

$U_1 = 0$.

$V_1 = C_{1,1} - U_1 = 20$.

$V_4 = C_{1,4} - U_1 = 15$.

$U_3 = C_{3,1} - V_1 = -14$.

$V_5 = C_{3,5} - U_3 = 22$.

$U_2 = C_{2,5} - V_5 = 7$.

$V_2 = C_{2,2} - U_2 = 8$.

$V_3 = C_{2,3} - U_2 = 9$.

Определяем значения оценок $S_{i,j} = C_{i,j} - (U_i + V_j)$ для всех свободных клеток:

$S_{1,2} = C_{1,2} - (U_1+V_2) = 15$.

$S_{1,3} = C_{1,3} - (U_1+V_3) = 11$.

$S_{1,5} = C_{1,5} - (U_1+V_5) = 2$.

$S_{2,1} = C_{2,1} - (U_2+V_1) = 2$.

$S_{2,4} = C_{2,4} - (U_2+V_4) = -3$.

$S_{3,2} = C_{3,2} - (U_3+V_2) = 17$.

$S_{3,3} = C_{3,3} - (U_3+V_3) = 15$.

$S_{3,4} = C_{3,4} - (U_3+V_4) = 8$.

Склад	Магазин					Запасы груза
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	+ 20 **90**	23	20	– 15 **230**	24	320
A2	29	15 **140**	16 **110**	+ 19	– 29 **30**	280
A3	– 6 **60**	11	10	9	+ 8 **190**	250
Потребность	150	140	110	230	220	

Перемещаем по циклу груз величиной в 30 единиц, прибавляя эту величину к грузу в клетках со знаком «плюс» и отнимая ее от груза в клетках со знаком «минус». В результате перемещения по циклу получим новый план.

Склад	Магазин					Запасы груза
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	20 **120**	23	20	15 **200**	24	320
A2	29	15 **140**	16 **110**	19 **30**	29	280
A3	6 **30**	11	10	9	8 **220**	250
Потребность	150	140	110	230	220	

Целевая функция (транспортные расходы) z= 11770, значение уменьшилось на 90 единиц по сравнению с предыдущим этапом.

Проверим полученный план на оптимальность.

Подсчитаем потенциалы.

$U_1 = 0$

$V_1 = C_{1,1} – U_1 = 20$

$V_4 = C_{1,4} – U_1 = 15$

$U_2 = C_{2,4} – V_4 = 4$

$U_3 = C_{3,1} – V_1 = –14$

$V_5 = C_{3,5} – U_3 = 22$

$V_2 = C_{2,2} – U_2 = 11$

$V_3 = C_{2,3} – U_2 = 12$

Определяем значения оценок для всех свободных клеток:

$S_{1,2} = C_{1,2} – (U_1 + V_2) = 12$.

$S_{1,3} = C_{1,3} – (U_1 + V_3) = 8$.

$S_{1,5} = C_{1,5} – (U_1 + V_5) = 2$.

$S_{2,1} = C_{2,1} – (U_2 + V_1) = 5$.

$S_{2,5} = C_{2,5} – (U_2 + V_5) = 3$.

$S_{3,2} = C_{3,2} – (U_3 + V_2) = 14$.

$S_{3,3} = C_{3,3} – (U_3 + V_3) = 12$.

$S_{3,4}= C_{3,4} – (U_3 + V_4) = 8$.

Так как все оценки $S_{i,j}$ >= 0, то полученный план является оптимальным, минимальные транспортные расходы равны 11770. Оптимальный план перевозок представлен ниже.

Склад	Магазин					Запасы груза
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	20 **120**	23	20	15 **200**	24	320
A2	29	15 **140**	16 **110**	19 **30**	29	280
A3	6 **30**	11	10	9	8 **220**	250
Потребность	150	140	110	230	220	

5.2. Задания для самостоятельной работы

Задача 5.1.

Решить транспортную задачу:

a_i	b_j			
	75	80	60	85
100	6	9	3	5
150	1	2	4	6
50	8	10	20	1

Задача 5.2.

Решить транспортную задачу:

a_i	b_j			
	75	80	60	85
100	5	8	3	5
150	1	3	5	6
50	8	10	20	1

Задача 5.3.

Решить транспортную задачу:

a_i	b_j			
	40	130	50	50
180	5	3	8	4
70	2	3	9	5
20	7	5	9	2

Задача 5.4.

Решить транспортную задачу:

a_i	b_j			
	40	130	50	50
180	5	2	12	4
70	6	3	9	5
20	7	5	9	6

Задача 5.5.

Решить транспортную задачу:

a_i	b_j				
	50	220	80	110	40
200	7	2	1	20	4
130	8	5	2	11	7
170	4	10	15	10	13

Задача 5.6.

Решить транспортную задачу:

a_i	b_j			
	75	90	60	85
100	6	9	3	5
160	1	2	4	6
50	8	10	20	1

Задача 5.7.

Решить транспортную задачу:

a_i	b_j			
	95	80	60	85
120	5	8	3	5
150	1	3	5	6
50	8	10	20	1

Задача 5.8.

Решить транспортную задачу:

a_i	b_j			
	40	130	50	90
180	5	3	8	4
110	2	3	9	5
20	7	5	9	2

Задача 5.9.

Решить транспортную задачу:

a_i	b_j			
	40	130	60	50
180	5	2	12	4
80	6	3	9	5
20	7	5	9	6

Задача 5.10.

Решить транспортную задачу:

a_i	b_j				
	50	210	80	110	40
200	7	2	1	20	4
120	8	5	2	11	7
170	4	10	15	10	13

6. ТЕОРИЯ ИГР

6.1. Практическая часть

Пример 6.1.

В игре участвуют первый и второй игроки, каждый из них может записать независимо от другого цифры 1, 2 и 3. Если разность между цифрами, записанными игроками, положительна, то первый игрок выигрывает количество очков, равное разности между цифрами, и, наоборот, если разность отрицательна, то выигрывает второй игрок. Если разность равна нулю, то игра заканчивается вничью.

У первого игрока три стратегии (варианта действия): A_1 (записать 1), A_2 (записать 2) и A_3 (записать 3); у второго игрока также три стратегии: B_1, B_2, B_3.

Задача первого игрока – максимизировать свой выигрыш, задача второго игрока – минимизировать свой проигрыш.

Матрица игры, или платежная матрица, имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Найдем наилучшую стратегию первого игрока. Если игрок выбрал стратегию A_1, то в худшем случае он получит выигрыш $\alpha_1=\min(0;\ -1;\ -2) = -2$. Соответственно при выборе стратегии $A_2 - \alpha_2 = \min(l;\ 0;\ -1) = -1$, $A_3 - \alpha_3 = \min(2;\ 1;\ 0) = 0$. Предвидя такую возможность, первый игрок должен выбрать такую стратегию, чтобы максимизировать свой минимальный выигрыш

$\alpha = \max \alpha_i = \max(-2; -1; 0) = 0$.

Аналогично определяется наилучшая стратегия второго игрока. Второй игрок при выборе стратегии B_1 в худшем случае получит проигрыш $\beta_1= \max(0;\ 1;\ 2) = 2$. При выборе стратегий B_2 и B_3 проигрыш составит, соответственно, $\beta_2 = \max(-1;0;1) = 1$; $\beta_3 = \max(-2;-1;0)$. Он выбирает стратегию, при которой его проигрыш будет минимальным и составит $\beta = \min_j \beta_j = \min(2;1;0) = 0$.

Пример 6.2.

Рассмотрим игру, представленную платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 7 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$\alpha = \max(3, 1, 3, 1, 1) = 3$; $\beta = \min(8, 7, 7, 4, 5) = 4$; $\alpha \neq \beta$; $3 \le \nu \le 4$. Элементы стратегий A_2 и A_4 одинаковы, одну из них можно исключить. Все элементы стратегии A_2 меньше элементов стратегии A_1, следовательно, A_2 можно исключить. Все элементы A_5 меньше A_3, исключаем A_5.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 7 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для второго игрока, сравнивая B_1 и B_4, исключаем B_1; сравнивая B_2 и B_5, исключаем B_2.

В результате преобразований получим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\alpha = \max(3, 3) = 3; \ \beta = \min(7, 4, 5) = 4; \alpha \neq \beta; \ 3 \le \nu \le 4.$$

Пример 6.3.

Найти решение игры, заданной матрицей

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$\alpha = \max(1, 2) = 2$; $\beta = \min(3, 4) = 3$; $\alpha \neq \beta$; $2 \le \nu \le 3$.

Игра не имеет седловой точки. Оптимальное решение следует искать в области смешанных стратегий. Построим на плоскости отрезки, соответствующие стратегиям второго игрока.

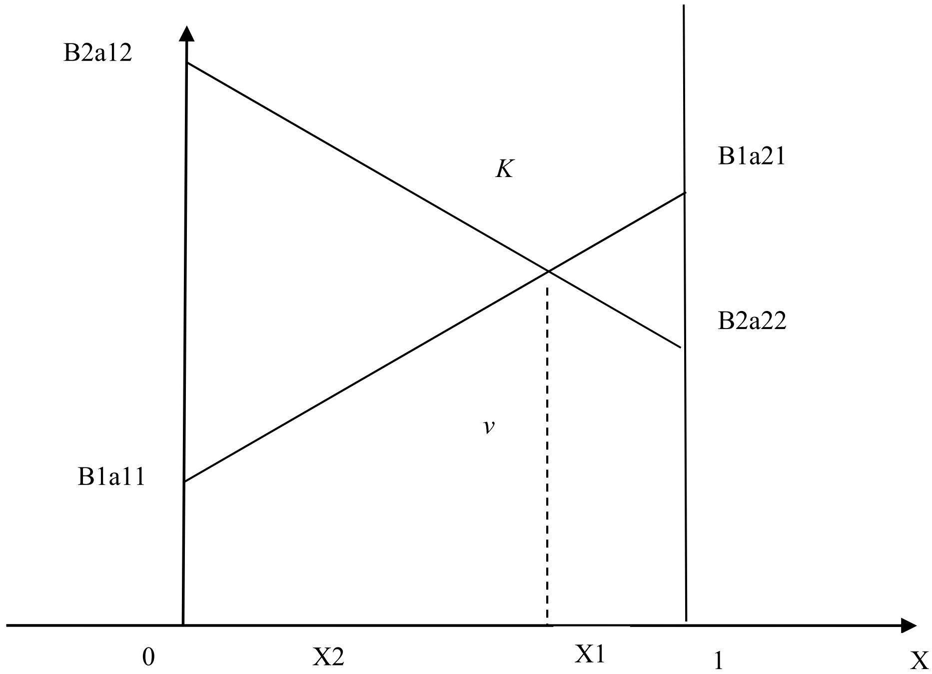


Рис. 4. Стратегии второго игрока

По формулам

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},$$

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},$$

$$\nu = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

находим оптимальные стратегии и цену игры:

$$x_1 = \frac{1}{4};\ x_2 = \frac{3}{4};\ y_1 = \frac{1}{2};\ y_2 = \frac{1}{2};\ \nu = \frac{5}{2}.$$

Ответ.

Оптимальные смешанные стратегии игроков $\overline{x}\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$ и $\overline{y}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, цена игры составляет $\nu = \frac{5}{2}$.

Данный ответ означает следующее:

– если первый игрок с вероятностью $\frac{1}{4}$ – будет применять первую стратегию и с вероятностью $\frac{3}{4}$ вторую, то при достаточно большом количестве игр с данной матрицей его выигрыш в среднем составит не менее $\frac{5}{2}$;

– если второй игрок с вероятностью $\frac{1}{2}$ будет применять первую стратегию и с вероятностью $\frac{1}{2}$ вторую, то при достаточно большом количестве игр с данной матрицей его проигрыш в среднем составит не более $\frac{5}{2}$.

Пример 6.4.

Найти решение игры, заданной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$\alpha = \max(1, 1) = 1$; $\beta = \min(4, 2, 3, 5) = 2$; $\alpha \neq \beta$; $1 \leq v \leq 2$.

Игра не имеет седловой точки. Оптимальное решение следует искать в области смешанных стратегий. Построим на плоскости отрезки, соответствующие стратегиям второго игрока.

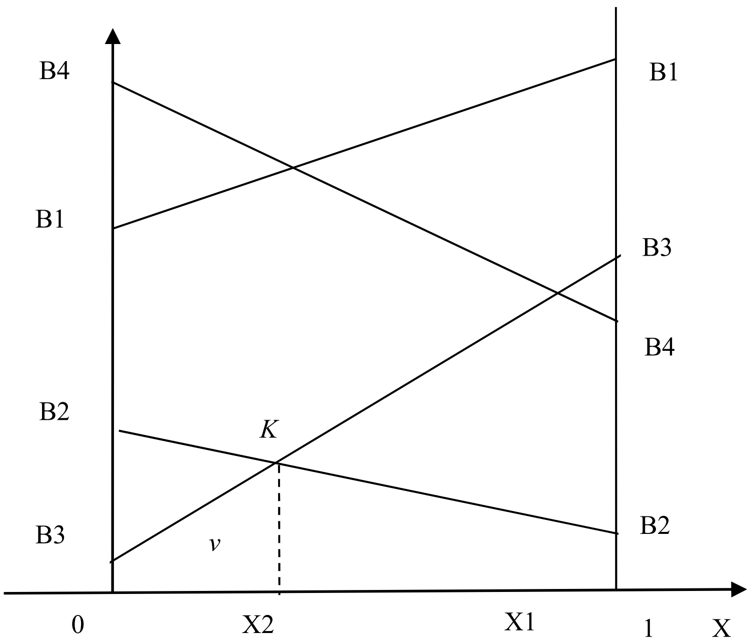


Рис. 5. Стратегии второго игрока

Нижней границей выигрыша для игрока A является ломаная B_3KB_2. Стратегии B_3 и B_2 являются активными стратегиями игрока B. Точка их пересечения K определяет оптимальные стратегии игроков и цену игры. Второму игроку невыгодно применять стратегии B_1 и B_4, поэтому вероятность их применения равна 0, т. е. $y_1 = 0$ и $y_4 = 0$.

Решение игры сводится к решению игры с матрицей 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\alpha = \max(1, 1) = 1;\ \beta = \min(2, 3) = 2;\ \alpha \neq \beta;\ 1 \leq \nu \leq 2.$$

По формулам находим оптимальные стратегии и цену игры:

$$x_1 = \frac{2}{3};\ x_2 = \frac{1}{3};\ y_1 = \frac{1}{3};\ y_2 = \frac{2}{3};\ \nu = \frac{5}{3}.$$

Ответ:

Оптимальные смешанные стратегии игроков $\overline{x}\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ и $\overline{y}\left(0; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}; 0\right)$, цена игры составляет $\nu = \frac{5}{3}$.

Данный ответ означает следующее:

– если первый игрок с вероятностью $\frac{2}{3}$ будет применять первую стратегию и с вероятностью $\frac{1}{3}$ вторую, то при достаточно большом количестве игр с данной матрицей его выигрыш в среднем составит не менее $\frac{5}{3}$

– если второй игрок с вероятностью $\frac{2}{3}$ будет применять вторую стратегию, с вероятностью $\frac{1}{3}$ третью и не будет применять первую и четвертую стратегии, то при достаточно большом количестве игр с данной матрицей его проигрыш в среднем составит не более $\frac{5}{3}$.

Пример 6.5.

Найти решение игры, заданной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$\alpha = \max(2, 1, 0, -2) = 2$; $\beta = \min(4, 5) = 4$; $\alpha \neq \beta$; $2 \le \nu \le 4$.

Игра не имеет седловой точки. Оптимальное решение следует искать в области смешанных стратегий. Построим на плоскости отрезки, соответствующие стратегиям второго игрока.

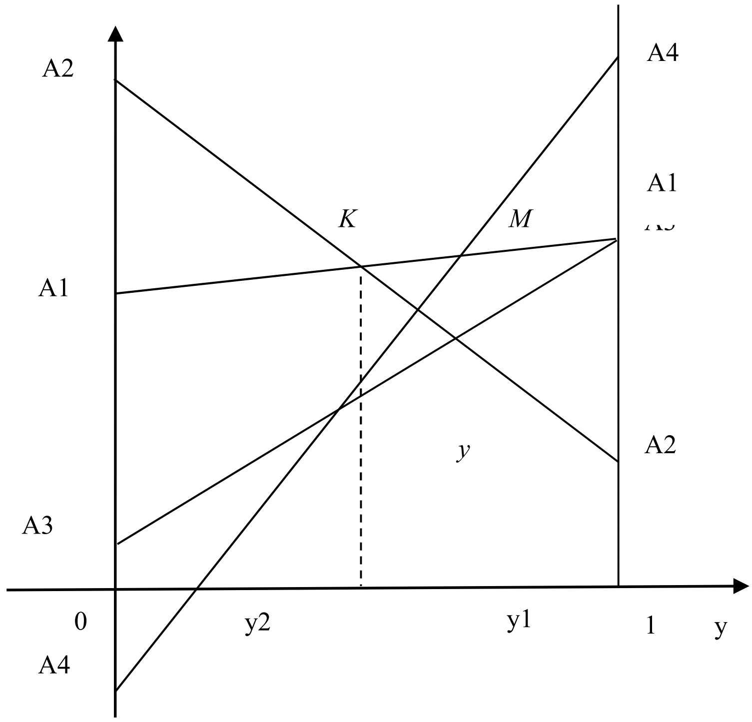


Рис. 6. Стратегии второго игрока

Верхней границей проигрыша для игрока В является ломаная A_2KMA_4. Стратегии A_1 и A_2 являются активными стратегиями игрока А. Точка их пересечения К определяет оптимальные стратегии игроков и цену игры. Первому игроку не выгодно применять стратегии A_3 и A_4, поэтому вероятность их применения равна 0, т. е. $x_3 = x_4 = 0$.

Решение игры сводится к решению игры с матрицей 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пример 6.6.

Найти решение игры, заданной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 9 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$\alpha = \max(1, 2, 1) = 2$; $\beta = \min(4, 9, 3, 6, 7) = 4$; $\alpha \neq \beta$; $2 \leq \nu \leq 4$.

Игра не имеет седловой точки. Оптимальное решение следует искать в области смешанных стратегий.

Для определения оптимальной стратегии игрока А имеем следующую задачу линейного программирования.

$$L(\overline{t}) = t_1 + t_2 + t_3 \to min,$$
$$\begin{cases} 3t_1 + 4t_2 + 2t_3 \geq 1, \\ 7t_1 + 9t_2 + 3t_3 \geq 1, \\ t_1 + 3t_2 + t_3 \geq 1, \\ t_1 + 6t_2 + 4t_3 \geq 1, \\ 5t_1 + 2t_2 + 7t_3 \geq 1. \end{cases} \quad t_i \geq 0, i = \overline{1,3}.$$

Для оптимальной стратегии В имеет следующую задачу линейного программирования:

$$\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{s}}) = \mathrm{s}_1 + \mathrm{s}_2 + \mathrm{s}_3 + \mathrm{s}_4 + \mathrm{s}_5 \to \max,$$
$$\begin{cases} 3\mathrm{s}_1 + 7\mathrm{s}_2 + \mathrm{s}_3 + \mathrm{s}_4 + 5\mathrm{s}_5 \leq 1, \\ 4\mathrm{s}_1 + 9\mathrm{s}_2 + 3\mathrm{s}_3 + 6\mathrm{s}_4 + 2\mathrm{s}_5 \leq 1, \\ 2\mathrm{s}_1 + 3\mathrm{s}_2 + \mathrm{s}_3 + 4\mathrm{s}_4 + 7\mathrm{s}_5 \leq 1. \end{cases}$$
$$\mathrm{s_j} \geq 0, \mathrm{j} = \overline{1,5}.$$

Оптимальные решения пары двойственных задач имеют вид

$L_{min} = T_{max} = \frac{7}{19}$; $\overline{t}_{\text{опт}}\left(0; \frac{6}{19}; \frac{1}{19}\right)$; $\overline{s}_{\text{опт}}(0; 0; \frac{5}{19}; 0; \frac{2}{19})$.

Учитывая соотношения между x_i и t_i; y_j и s_j, а также равенство $L_{min} = T_{max} = \frac{1}{v}$, находим оптимальные стратегии игроков и цену игры

$$\overline{x}\left(0;\frac{6}{7};\frac{1}{7}\right);\ \overline{y}\left(0;0;\ \frac{5}{7};0;\frac{2}{7}\right);v=\frac{19}{7}.$$

Пример 6.7.

В приближении посевного сезона фермер Иванов имеет четыре альтернативы: A_1– выращивать кукурузу, A_2 – выращивать пшеницу, A_3 – выращивать овощи, A_4 – использовать землю под пастбища. Платежи, связанные с указанными возможностями, зависят от количества осадков, которые условно можно разделить на четыре категории: B_1 – сильные осадки, B_2 – умеренные осадки, B_2 – незначительные осадки, B_4 – засушливый сезон.

Платежная матрица в тысячах рублей оценивается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} -10 & 80 & 40 & -20 \\ 50 & 90 & 35 & 0 \\ -40 & 150 & 55 & -15 \\ 20 & 25 & 35 & 15 \end{pmatrix}.$$

Что должен посеять Иванов?

Решение:

1. Согласно критерию Вальда, рекомендуется применять максимальную стратегию.

$max_i\ (min_j\ a_{ij})$= max(-20; 35; -40; 15) = 35.

Следует сеять пшеницу.

2. Воспользуемся критерием Сэвиджа. Составим матрицу рисков, элементы которой находим по формуле:

$$r_{ij} = max_i\, a_{ij} - a_{ij},$$
$$R = \begin{pmatrix} 60 & 70 & 15 & 35 \\ 0 & 60 & 20 & 25 \\ 90 & 0 & 0 & 30 \\ 30 & 125 & 20 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оптимальная стратегия определяется выражением $min_i(max_j\, r_{ij})$.

Найдем min (70; 60; 90; 125) = 60.

В соответствии с этим критерием следует сеять пшеницу.

3. Воспользуемся критерием Гурвица. Оптимальная стратегия определяется по формуле

$$\underset{i}{max}\,(\alpha\,\underset{j}{min}\,a_{ij} + (1-\alpha)\,\underset{i}{max}\,a_{ij})$$

где α – степень оптимума и изменяется в диапазоне [0; 1], предположим $\alpha = \frac{1}{2}$,

$max_i\,(\frac{1}{2}min_j\,a_{ij} + (1-\alpha)\,max_i\,a_{ij})$= max(30; 62,5; 55; 25) = = 62,5, т. е. следует принять решение о посеве пшеницы.

Если принять известным распределение вероятностей для различных состояний природы, например, считать эти состояния равновероятными ($p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{4}$), то для принятия решения следует найти математические ожидания выигрыша

$$M_1 = (-10) * \frac{1}{4} + 80 * \frac{1}{4} + 40 * \frac{1}{4} + (-20) * \frac{1}{4} = \frac{90}{4},$$
$$M_2 = 50 * \frac{1}{4} + 90 * \frac{1}{4} + 35 * \frac{1}{4} + 0 * \frac{1}{4} = \frac{175}{4},$$
$$M_3 = (-40) * \frac{1}{4} + 150 * \frac{1}{4} + 55 * \frac{1}{4} + (-15) * \frac{1}{4} = \frac{150}{4},$$
$$M_4 = 20 * \frac{1}{4} + 25 * \frac{1}{4} + 35 * \frac{1}{4} + 15 * \frac{1}{4} = \frac{95}{4}.$$

Так как максимальное значение имеет M_2, то следует сеять пшеницу.

6.2. Задания для самостоятельной работы

Задача 6.1.

Для следующих платежных матриц определить нижнюю и верхнюю цены игры, минимаксные стратегии и наличие седловых точек:

$$1)\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad 2)\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$3)\begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 4 & 2 & 6 \\ 8 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}; \qquad 4)\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix};$$

$$5)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \qquad 6)\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix};$$

$$7)\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \\ -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 6.2.

Графическим методом найти решение игры, заданной матрицей:

$$1)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}; \qquad 2)\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$3)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 0{,}5 \end{pmatrix}; \qquad 4)\begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 9 & 5 & 8 \end{pmatrix};$$

$$5)\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \qquad 6)\begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix};$$

$$7)\begin{pmatrix}2 & 5\\ 7 & 1\\ 3 & 7\\ 4 & 6\end{pmatrix}; \qquad 8)\begin{pmatrix}7 & -1\\ 5 & 4\\ 1 & 5\\ 3 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix};$$

$$9)\begin{pmatrix}2 & 8\\ 4 & 3\\ 0 & 6\\ 3 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}; \quad 10)\begin{pmatrix}6 & 4\\ 5 & 3\\ 3 & 6\\ 1 & 8\\ 2 & 5\end{pmatrix}; \quad 11)\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ -1 & 0\\ 2 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Задача 6.3.

Симплексным методом найти решение игры, заданной матрицей:

$$1)\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 4\\ 1 & 5 & 4 & 3\\ 2 & 6 & 2 & 1\end{pmatrix}; \quad 2)\begin{pmatrix}3 & -1 & 2 & 3 & 5\\ -2 & 4 & 2 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 3 & 1 & 4\\ 6 & -3 & 5 & 2 & 0\end{pmatrix};$$

$$3)\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 2 & -3\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}; \quad 4)\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 5 & 7\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}; \quad 5)\begin{pmatrix}6 & 1 & 3\\ 2 & 4 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Задача 6.4.

Предприятие может выпускать три вида продукции (а, б, в), получая при этом прибыль, зависящую от спроса. Спрос, в свою очередь, может принимать одно из четырех состояний (1, 2, 3, 4). В следующей матрице элементы a_{ik} характеризуют прибыль, которую получит предприятие при выпуске i-й продукции и k-м состоянии спроса:

$$\begin{pmatrix}8 & 3 & 6 & 2\\ 4 & 5 & 6 & 5\\ 1 & 7 & 4 & 7\end{pmatrix}.$$

Определить оптимальные пропорции в выпускаемой продукции, считая состояние спроса полностью неопределенным, гарантируя при этом среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса.

Задача 6.5.

Предприятие выпускает скоропортящуюся продукцию, которую оно может сразу отправить потребителю (стратегия а), отправить на склад для хранения (стратегия б), или подвергнуть дополнительной обработке (стратегия в) для длительного хранения.

В свою очередь, потребитель может немедленно приобрести эту продукцию (стратегия 1), приобрести ее в течение небольшого отрезка времени (стратегия 2) или затребовать ее после длительного периода времени (стратегия 3).

Если предприятие выберет стратегию а, то дополнительные затраты на хранение и обработку продукции не потребуется.

Если потребитель применит стратегию 2 и 3, то предприятие потерпит убытки из-за порчи части продукции. Наоборот, если предприятие выберет стратегию в, а потребитель – стратегию 1, то возникнут неоправданные расходы на консервацию продукции. Определить оптимальное соотношение между продукцией, отправляемой потребителю на склад и на дополнительную обработку, руководствуясь минимаксным критерием при следующей матрице затрат:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Задача 6.6.

Магазин может завести в различных пропорциях товары трех типов (а, б и в). И реализация, а следовательно, и получаемая магазином прибыль зависят от вида товара и состояния спроса. Предполагая, что последний может характеризоваться тремя состояниями (1, 2 и 3) и учитывая, что спрос связан с изменением моды и прогнозирование его невозможно, определить оптимальные пропорции в закупке товаров из условия средней гарантированной прибыли при следующей матрице прибылей:

$$\begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 16 & 12 & 14 \\ 13 & 18 & 15 \end{pmatrix}$$

Задача 6.7.

Сельскохозяйственное предприятие имеет возможность выращивать две культуры – а и б. Необходимо определить, как сеять эти культуры, если при прочих равных условиях их урожаи зависят от погоды, а план посева должен обеспечить наибольший доход (прибыль от реализации выращенной продукции определяется полученным объемом). В зоне рискованного земледелия (а таковой является большая часть России) планирование посева должно осуществляться с учетом наименее благоприятного состояния погоды.

Таким образом, одной из сторон выступает сельскохозяйственное предприятие, заинтересованное в том, чтобы получить наибольший доход (игрок 1), а другой стороной – природа, способная навредить сельскохозяйственному предприятию в максимальной степени (от нее зависят погодные условия) и преследующая тем самым прямо противоположные цели (игрок 2).

Принятие природы за противника равносильно планированию посева с учетом наиболее неблагоприятных условий; если же погодные условия окажутся благоприятными, то выбранный план даст возможность увеличить доход.

Налицо антагонистический конфликт, в котором у игрока 1 две стратегии а и б, у игрока 2 – три: засушливое лето, нормальное лето, дождливое лето.

В качестве выигрыша игрока 1 возьмем прибыль от реализации и будем считать, что расчеты прибыли сельскохозяйственного предприятия (в млрд. руб.) в зависимости от состояния погоды сведены в матрицу:

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Задача 6.8.

Администрация некоторой фирмы ведет переговоры с профсоюзом рабочих и служащих о заключении контракта.

Платежная матрица, отражающая интересы договаривающихся сторон, имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 75 & 105 & 65 & 45 \\ 70 & 60 & 55 & 40 \\ 80 & 90 & 35 & 50 \\ 95 & 100 & 50 & 55 \end{pmatrix}.$$

Матрица описывает прибыль профсоюза (игрок А) и затраты администрации фирмы (игрок В). Найти решение игры.

Задача 6.9.

Между двумя небольшими государствами ведется война в течение 30 дн. Для бомбардировки небольшого моста страны В страна А использует оба имеющихся у нее самолета. Разрушенный мост восстанавливается в течение суток, а каждый самолет совершает один полет в день по одному из двух воздушных маршрутов, соединяющих эти страны. У страны В имеется два зенитных орудия, при помощи которых можно сбивать самолеты страны А. Если самолет собьют, то некая третья страна в течение суток поставит стране А новый самолет.

Страна А может послать самолеты либо по одному маршруту, либо по разным. Страна В может поместить либо обе зенитки на одном маршруте, либо по одной зенитке на каждый маршрут.

Если один самолет летит по маршруту, на котором расположена одна зенитка, то этот самолет будет сбит. Если два самолета летят по маршруту, на котором расположены две зенитки, то оба самолета будут сбиты. Если два самолета летят по маршруту, на котором расположена одна зенитка, то сбит будет только один самолет. Если самолет доберется до цели, то мост будет разрушен. Найти оптимальное решение стратегии игроков и цену игры.

Задача 6.10.

Торговая фирма разработала несколько вариантов плана продажи товаров на предстоящей ярмарке с учетом меняющейся конъюнктуры рынка и спроса покупателей. Получающиеся от их возможных сочетаний показатели дохода представлены матрицей

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Определить оптимальный план продажи товаров.

Задача 6.11.

Розничное торговое предприятие разработало несколько вариантов плана продажи на предстоящей ярмарке с учетом конъюнктуры рынка и спроса покупателей. Получающиеся от их возможных сочетаний показатели прибыли предприятий даны в матрице

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определить стратегию предприятия и цену игры.

Задача 6.12.

Фирма производит пользующиеся спросом платья и костюмы, реализация которых зависит от состояния погоды. Затраты фирмы на 1 платье – 7 ден. ед., 1 костюм 28 ден. ед. Цены их реализации составляют 15 и 50 ден. ед., соответственно. По данным наблюдений за несколько предыдущих лет, фирма может реализовать в условиях теплой погоды 1950 платьев и 610 костюмов, а при прохладной погоде – 630 платьев и 1050 костюмов.

В связи с возможными изменениями погоды определить стратегию фирмы, обеспечивающую ей максимальный доход от реализации продукции.

Задача 6.13.

Фирма выпускает два вида скоропортящихся продуктов $П_1$, и $П_2$. Ежедневные расходы на производство и реализацию продуктов не должны превышать 4000 ден ед. Перед экономической службой фирмы поставлена задача по определению ежедневного объема производства каждого вида продукции с целью получения наибольшей прибыли. Проведенные исследования показали, что себестоимость единицы продукции $П_1$ – 0,8 ден. ед., отпускная цена – 1,2 ден. ед., себестоимость единицы продукции $П_2$ – 0,5 ден. ед., а отпускная цена – 0,8 ден. ед.

Если продукция не реализуется в день выпуска, то ее качества значительно снижаются, и она продается по цене, в 4 раза меньше отпускной.

Реализация продукции зависит от состояния погоды: в хорошую погоду реализуется 1000 шт. $П_1$ и 6000 шт. $П_2$, в плохую – 4000 шт. $П_1$ и 1200 шт. $П_2$. На реализацию всей произведенной за день продукции расходуется 200 ден. ед.

Задача 6.14.

Предприятие специализируется на выпуске кефира. Кефир разливается в пакеты, определенное количество которых складывается в ящики и реализуется в розницу. Предприятие должно решить, сколько ящиков кефира следует производить ежедневно. Вероятности того, что спрос на кефир в течение дня будет 5, 6, 7 и 8 ящиков, равны, соответственно, 0,2; 0,3; 0,4 и 0,1. Затраты на производство одного ящика с пакетами кефира – 100 руб., цена продажи – 200 руб. Если кефир в течение дня не продается, то он портится и предприятие не получает дохода.

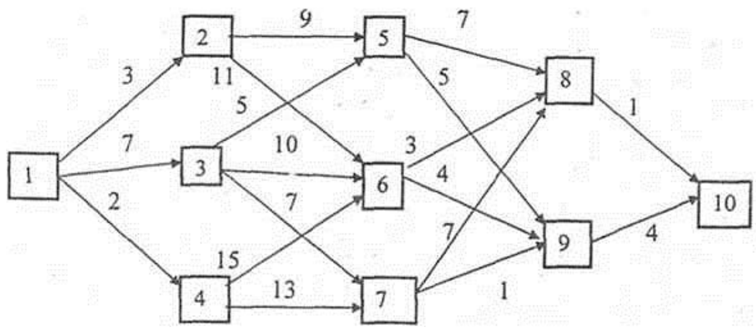
Сколько ящиков с кефиром следует производить предприятию, чтобы получить наибольший доход?

7. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

7.1. Практическая часть

Пример 7.1.

Определить оптимальный маршрут из пункта 1 в пункт 10 по схеме маршрутов движения.



Каждый квадрат на схеме изображает один из населенных пунктов, которые для удобства пронумерованы. Стоимость переезда из пункта i в пункт j обозначим через c_{ij} (значения этих величин для рассматриваемого примера отмечены на схеме).

Требуется определить такой путь из пункта 1 в пункт 10, общая стоимость которого является минимальной.

Решение. *Используем формулу* рекуррентных соотношений Беллмана:

$$f_{\mathrm{n}}(i) = \min_{j}\{c_{ij} + f_{n-1}(j)\}, \qquad n = \overline{1, N}$$

где N–количество этапов в решении;

$f_n(i)$ – стоимость, отвечающая стратегии минимальных затрат для пути от пункта i, если до конечного пункта остается n шагов;

$P_n(i)$ – решение, позволяющее достичь $f_n(i)$.

Начинаем поиск оптимального маршрута от конечного пункта, положив

$n = 1$;

$f_1(8) = \mathrm{c}_{8,10} = 1, \quad \mathrm{P}_1(8) = 10;$

$f_1(9) = \mathrm{c}_{9,10} = 4, \quad \mathrm{P}_1(9) = 10.$

n=2;

$f_2(5) = \min\{c_{5,8} + f_1(8);\ c_{5,9} + f_1(9)\} = 8,\ P_2(5) = 8;$

$f_2(6) = \min\{c_{6,8} + f_1(8);\ c_{6,9} + f_1(9)\} = 4,\ P_2(6) = 8;$

$f_2(7) = \min\{c_{7,8} + f_1(8);\ c_{7,9} + f_1(9)\} = 5,\ P_2(7) = 9.$

n=3.

$f_3(2) = \min\{c_{2,5} + f_2(5);\ c_{2,6} + f_2(6)\} = 15,\ P_3(2) = 6;$

$f_3(3) = \min\{c_{3,5} + f_2(5); c_{3,6} + f_2(6); c_{3,7} + f_2(7)\} = 12,\ P_3(3) = 7;$

$f_3(4) = \min\{c_{4,6} + f_2(6);\ c_{4,7} + f_2(7)\} = 18,\ P_3(4) = 7.$

n=4.

$f_4(1) = \min\{c_{1,2} + f_3(2);\ c_{1,3} + f_3(3); c_{1,4} + f_3(4)\} = 18, P_4(1) = 2.$

Ответ: оптимальный путь 1-2-6-8-10, затраты по которому составляют $f_4(1) = 18$.

Пример 7.2.

Планируется распределение начальной суммы X0 млн. р. Между четырьмя предприятиями некоторого объединения. Средства выделяются только в размерах кратных а = 80 млн. р. Функции прироста продукции от вложенных средств на каждом предприятии заданы таблично. Требуется так распределить вложения между предприятиями, чтобы общий прирост продукции (в млн. р.) был максимальным. Решить задачу на основе функционального уравнения Беллмана.

X0	Вкладываемые средства X	Функции прироста продукции на предприятии			
		*f*1(x)	*f*2(x)	*f*3(x)	*f*4(x)
400	0	10	15	13	14
	80	13	20	17	16
	160	16	22	21	23
	240	21	25	26	25
	320	25	30	28	27
	400	25	32	30	32

Решение: функциональное уравнение Беллмана для нашей задачи имеет вид:

$F_n(x0) = \max(f_n(x) + F_{n-1}(x0 - x))$, $n = 1,4$, $0 \le x \le x0$,

где $F1(x)=f1(x)$.

Первый шаг. Вычислим значения $F2(x0)$ по формуле

$F2(x0) = \max(f2(x) + F1(x0 - x))$, $0 \le x \le x0$

т. е. решим задачу для двух предприятий. Занесем все результаты в таблицу, где через x2 и x1 = x0 – x2 обозначены количества средств, вложенных соответственно во второе и первое предприятия.

x2	f2	x1	0	80	160	240	320	400	F2	План
		F1	10	13	16	21	25	25		
0	15		25	28	31	36	40	40	25	(0,0)
80	20		30	33	36	41	45		30	(0,80)
160	22		32	35	38	43			33	(80,80)
240	25		35	38	41				36	(160,80) (240,0)
320	30		40	43					41	(240,80)
400	32		42						45	(320,80)

Второй шаг. Распределим вложения между тремя предприятиями. Будем использовать формулу

$F3(x0) = \max(f3(x) + F2(x0 - x))$, $0 \le x \le x0$

при этом значения F2 будем брать из таблицы 2, а значения f3 – из таблицы 1. Результаты занесем в таблицу 3, где x0 – x3 = x1 + x2.

Затем аналогично вычислим F4(x0).

x3	f3	x1+x2	0	80	160	240	320	400	F3	План
		F2	25	30	33	36	41	45		
0	13		38	43	46	49	54	58	38	(0,0,0)
80	17		42	47	50	53	58		43	(0,80,0)
160	21		46	51	54	57			47	(0,80,80)
240	26		51	56	59				51	(0,0,240) (0,80,160)
320	28		53	58					56	(0,80,240)
400	30		55						59	(80,80,240)

x4	f4	x0-x4	0	80	160	240	320	400	F4	План
		F3	38	43	47	51	56	59		
0	14		52	57	61	65	70	73	52	(0,0,0,0)
80	16		54	59	63	67	72		57	(0,80,0,0)
160	23		61	66	70	74			61	(0,80,80,0) (0,0,0,160)
240	25		63	68	72				66	(0,80,0,160)
320	27		65	70					70	(0,80,240,0) (0,80,80,160)
400	32		70						74	(0,0,240,160) (0,80,160,160)

Таким образом, оптимальная программа распределения средств между четырьмя предприятиями представлена в последнем столбце. Наибольший прирост при вложении 400 тыс. рублей составит 74 тыс.р., при этом возможно два варианта инвестирования:

Вложить в третье предприятие 240 и в четвертое – 160 тыс.р.

Вложить во второе предприятие 80, в третье и четвертое – по 160 тыс. р.

Пример 7.3.

Инвестор выделяет средства в размере 5 тыс. ден. ед., которые должны быть распределены между тремя предприятиями.

Требуется, используя принцип оптимальности Беллмана, построить план распределения инвестиций между предприятиями, обеспечивающий наибольшую общую прибыль, если каждое предприятие при инвестировании в него средств x тыс. ден. ед. приносит прибыль pi(x) тыс. ден. ед. (*i*=1, 2 и 3) по следующим данным:

Инвестирование средств (тыс. ден. ед.)	Прибыль (тыс. ден. ед.)		
x	p1(x)	p2(x)	p3(x)
1	3,22	3,33	4,27
2	3,57	4,87	7,64
3	4,12	5,26	10,25
4	4	7,34	15,93
5	4,85	9,49	16,12

Решение: составим математическую модель задачи.

Число шагов равно 3.

Пусть s – количество средств, имеющихся в наличии перед данным шагом, и характеризующих состояние системы на каждом шаге.

Управление на i-ом шаге (i=1,2,3) выберем x_i – количество средств, инвестируемых в i-ое предприятие.

Выигрыш $p_i(x_i)$ на i-ом шаге – это прибыль, которую приносит i-ое предприятие при инвестировании в него средств x_i. Если через выигрыш в целом обозначить общую прибыль W, то $W=p_1(x_1) + p_2(x_2)+ p_3(x_3)$.

Если в наличии имеются средства в количестве s тыс. ден. ед. и в i-ое предприятие инвестируется x тыс. ден. ед, то для дальнейшего инвестирования остается (s-x) тыс. ден. ед. Таким образом, если на i-ом шаге система находилась в состоянии s и выбрано управление x, то на (i+1)-ом шаге система будет находится в состоянии (s-x), и, следовательно, функция перехода в новое состояние имеет вид: $f_i(s, x) = s–x$.

На последнем (i=3) шаге оптимальное управление соответствует количеству средств, имеющихся в наличии, а выигрыш равен доходу, приносимым последним предприятием: $x_3(s)=s$, $W_3(s)=p_3(s)$.

Согласно принципу оптимальности Беллмана, управление на каждом шаге нужно выбирать так, чтобы оптимальной была сумма выигрышей на всех оставшихся до конца процесса шагах, включая выигрыш на данном шаге. Основное функциональное уравнение примет вид

$W_i (s) = \max\{ p_i (x) + W_{i+1} (s − x)\}$ $x\leq s$

Проведем пошаговую оптимизацию, по результатам которой заполним таблицу.

s	i=3		i=2		i=1	
	x3(s)	W3(s)	x2(s)	W2(s)	x1(s)	W1(s)
1	1	4,27	0	4,27		
2	2	7,64	0	7,64		
3	3	10,25	1	10,97		
4	4	15,93	0	15,93		
5	5	16,12	1	19,26	0	19,26

В первой колонке таблицы записываются возможные состояния системы, в верхней строке – номера шагов с оптимальным управлением и выигрышем на каждом шаге, начиная с последнего. Так как для последнего шага i=3 функциональное уравнение имеет вид x3(s)=s, W3(s)=p3(s), то две колонки таблицы, соответствующие i=3, заполняются автоматически по таблице исходных данных.

На шаге i=2 основное функциональное уравнение имеет вид

$W2(s) = \max\{ p2(x) + W3(s - x)\}\ x \le s$

Поэтому для проведения оптимизации на этом шаге заполним таблицу для различных состояний s при шаге i=3.

s	x	s-x	p2(x)	W3(s-x)	p2(x)+W3 (s-x)	W2(s)
1	0	1	0	4,27	4,27	4,27
	1	0	3,33	0	3,33	
2	0	2	0	7,64	7,64	7,64
	1	1	3,33	4,27	7,6	
	2	0	4,87	0	4,87	
3	0	3	0	10,25	10,25	10,97
	1	2	3,33	7,64	10,97	
	2	1	4,87	4,27	9,14	
	3	0	5,26	0	5,26	
4	0	4	0	15,93	15,93	15,93
	1	3	3,33	10,25	13,58	
	2	2	4,87	7,64	12,51	
	3	1	5,26	4,27	9,53	
	4	0	7,34	0	7,34	
5	0	5	0	16,12	16,12	19,26
	1	4	3,33	15,93	19,26	
	2	3	4,87	10,25	15,12	
	3	2	5,26	7,64	12,9	
	4	1	7,34	4,27	11,61	
	5	0	9,49	0	9,49	

На шаге i=1 основное функциональное уравнение имеет вид

$W1(s) = \max\{ p1(x) + W2(s - x)\}\ x \le s$, а состояние системы перед первым шагом s=5, поэтому для проведения оптимизации на этом шаге заполним таблицу.

s	x	s-x	p1(x)	W2(s-x)	p1(x)+W2 (s-x)	W1(s)
5	0	5	0	19,26	19,26	19,26
	1	4	3,22	15,93	19,15	
	2	3	3,57	10,97	14,54	
	3	2	4,12	7,64	11,76	
	4	1	4	4,27	8,27	
	5	0	4,85	0	4,85	

Видно, что наибольшее значение выигрыша составляет 19,26. При этом оптимальное управление на первом шаге составляет x1(s1)=0 (s1=5), на втором шаге x2(s2) =1 (s2=s1–x1=5) и на третьем шаге x3(s3) =4 (s3=s2-x2=4).

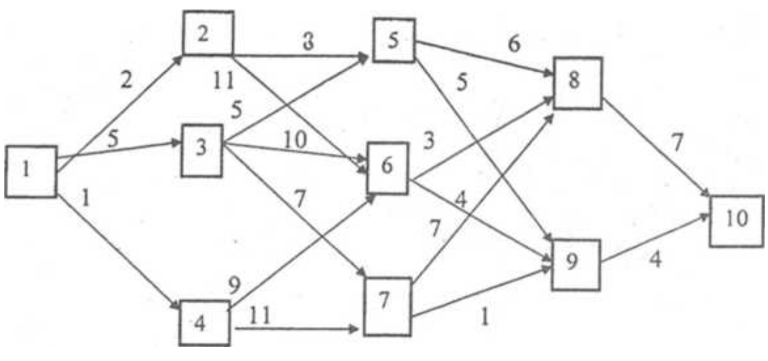
Это означает, что (0, 1, 4) – оптимальный план распределения инвестиций между предприятиями.

Таким образом, для получения наибольшей общей прибыли в размере 19,26 тыс. ден. ед., необходимо вложить 1 тыс. ден. ед. во второе предприятие и 4 тыс. ден. ед. в третье предприятие.

7.2. Задания для самостоятельной работы

Задание 7.1.

Определить оптимальный маршрут из пункта 1 в пункт 10 по схеме маршрутов движения.



Задание 7.2.

Найти оптимальный маршрут, если между пунктами 7 и 9 не существует сообщения.

Задание 7.3.

Предположим, что введен маршрут, соединяющий пункты 3 и 8. При каких значениях c38 оптимальный маршрут останется прежним?

Задание 7.4.

Изменится ли оптимальный маршрут, если величины c12, c13, c14 изменить на одну и ту же величину?

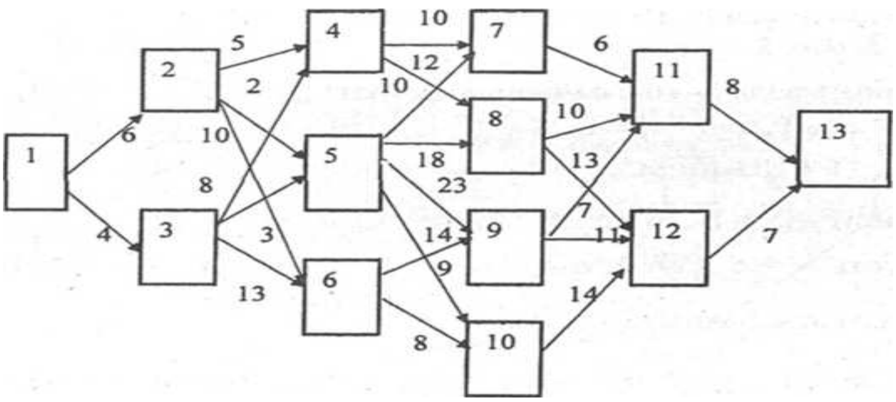
Задание 7.5.

Найти оптимальный маршрут из пункта 1 в пункт 10, включающий пункт 8.

Задание 7.6.

Выполнить рекуррентные вычисления по формуле (4.1), начиная с пункта 1.

Задание 7.7. Определить оптимальный маршрут при следующих исходных данных:



Задание 7.8. Определить оптимальный маршрут, проходящий через пункт 6.

Задание 7.9.

Определить множество значений c13, при которых оптимальный маршрут останется прежним. Найти аналогичное множество для величин c37 и c26.

Задание 7.10.

Найти оптимальный маршрут, если между пунктами 3 и 5 не существует сообщения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для оптимизации производства традиционно используются методы линейного программирования. Критериями эффективности могут быть, как-то: оптимальное использование производственного оборудования, рентабельность изделий, совокупный маржинальный доход, оптимальное распределение выделенных средств в инвестиционные проекты, минимальный объем ресурсов и т. д.

Методы линейного программирования находят свое применение даже при решении задач, относящихся к задачам нелинейного программирования. В качестве примера можно указать задачи дробно-линейного программирования, интерпретируемые в экономике как задачи определения рентабельности затрат на производство изделий, рентабельности продаж, нахождения себестоимости изделий и т. п. Путем введения новых переменных их можно свести к задачам линейного программирования.